

**GEPAM**

Grupo de Estudos e Pesquisa em  
Alteridade e Educação Matemática

Rosilene Beatriz Machado  
Janine Soares de Oliveira  
Djeison Machado  
Luí Fellippe da Silva Bellincantta Mollossi  
Rafael Rossi Viégas

Coleção

FOR

MA

TEMÁTICA

MATEMÁTICA EM ESTUDO

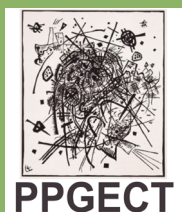
**FUNÇÕES**


2



Neste material, apresentamos em versão bilíngue Português-Libras alguns dos principais conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de funções presentes no currículo de matemática, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Assim, no decorrer das páginas que seguem, o leitor encontrará uma discussão conceitual sobre: domínio, contradomínio, conjunto imagem, lei de formação, formas de representações de funções, função polinomial do primeiro grau, função polinomial do segundo grau, função exponencial, função logarítmica e função periódica.

Apoio:





Rosilene Beatriz Machado  
Janine Soares de Oliveira  
Djeison Machado  
Luí Fellippe da Silva Bellincantta Mollossi  
Rafael Rossi Viégas

**Coleção**

**FOR**

**MA**

**TEMÁTICA**

MATEMÁTICA EM ESTUDO

**2**

**FUNÇÕES**

Copyright © Editora Arara Azul Ltda, 2023

Produção editorial  
EDITORA ARARA AZUL

Rua A, Condomínio Vale da União, casa 20  
25725-055 – Araras, Petrópolis – RJ  
Cel/WhatsApp: (24) 98828-2148  
E-mail: [eea@editora-arara-azul.com.br](mailto:eea@editora-arara-azul.com.br)  
[www.editora-arara-azul.com.br](http://www.editora-arara-azul.com.br)

Todos os direitos reservados. A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação do copyright (Lei 9.610/98).

Os conceitos emitidos neste livro são de inteira responsabilidade dos autores.

#### **Gerência de produção**

Clélia Regina Ramos  
Karine de Fátima Ribeiro da Cruz

#### **Projeto gráfico de capa e miolo**

Gleide Ferraz

#### **Editoração eletrônica**

Gleide Ferraz

#### **Revisão**

Fátima Cristina Kneipp Borde  
Rosilene Beatriz Machado

#### **Ilustração de miolo**

Djeison Machado  
Luí Felipe da Silva Bellincantta Mollossi  
Rafael Rossi Viégas

#### **Autores**

Rosilene Beatriz Machado  
Janine Soares de Oliveira  
Djeison Machado  
Luí Felipe da Silva Bellincantta Mollossi  
Rafael Rossi Viégas

Apoio:



PPGECT



UFSC

#### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

2 Funções [livro eletrônico] : Coleção FOR-MA-TEMÁTICA: Matemática em Estudo / organização Janine Soares de Oliveira, Rosilene Beatriz Machado. – 1. ed. – Petrópolis, RJ : Editora Arara Azul, 2023. – (Coleção FOR-MA-TEMÁTICA ; 2) PDF

Vários autores.

Bibliografia.

ISBN 978-85-8412-023-9 (coleção)

ISBN 978-85-8412-045-1 (v. 2)

1. Língua de sinais 2. Matemática I. Oliveira, Janine Soares de.  
II. Machado, Rosilene Beatriz. III. Série.

23-148417

CDD-510.7

# AGRADECIMENTOS



**E**xpressamos nossos agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) que, por meio do Programa de Excelência Acadêmica (PROEX), apoiaram esta proposta, tornando possível sua publicação.

Os autores.



# APRESENTAÇÃO

Este é o segundo volume da Coleção FOR-MA-TEMÁTICA: Matemática em Estudo, elaborado pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática – Gepam/UFSC ([gepam.ufsc.br](http://gepam.ufsc.br)), no âmbito de dois projetos em desenvolvimento: o projeto de pesquisa “Na vibração com a alteridade surda, o que pode a matemática?” e o projeto de extensão “Por uma Matemática Surda: ensino de Matemática em Libras”.

O grupo tem por objetivo produzir estudos e pesquisas que problematizam as relações entre alteridade e educação matemática. É liderado pelas professoras Rosilene Beatriz Machado e Janine Soares de Oliveira. Conta ainda com a participação de estudantes de graduação em Matemática e graduação em Letras-Libras, estudantes de pós-graduação, professores de matemática e intérpretes/tradutores de Libras.

Neste material, apresentamos em versão bilíngue Português-Libras alguns dos principais conceitos mate-

máticos relacionados ao conteúdo de funções presentes no currículo de matemática, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Assim, no decorrer das páginas que seguem, o leitor encontrará uma **discussão conceitual** sobre: domínio, contradomínio, conjunto imagem, lei de formação, formas de representações de funções, função polinomial do primeiro grau, função polinomial do segundo grau, função exponencial, função logarítmica e função periódica.

Este texto foi escrito a partir do estudo de materiais específicos sobre funções, de livros didáticos, bem como de nossas experiências com o ensino deste tema. Optamos por não apresentar demonstrações de teoremas ou leis matemáticas, assim como optamos por focar tão somente em uma discussão conceitual, sem ênfase na resolução de exercícios. Se o leitor tiver curiosidade, poderá encontrar tanto as demonstrações quanto a resolução de exercícios relacionados a funções em *sites* de internet especializados ou livros de matemática.

Além disso, por ser tratar de um material elaborado a partir de projetos que propõem dialogar com intérpretes de Libras e estabelecer uma interlocução com esses profissionais e demais interessados na educação de pessoas surdas, acreditamos ser importante disponibilizar também uma versão em Libras. As escolhas tradutórias se fundamentam na experiência da tradutora a partir de sua formação em Matemática e sua experiência em projetos de tradução para Libras, contando ainda com a parceria de revisão de um tradutor experiente. Assim, não



temos intenção de impor ou mesmo propor qualquer padronização mas, sim, contribuir para a reflexão sobre a construção do discurso matemático em Libras.

Com isto, é nosso intuito que este material possa servir como material de apoio e estudo a tradutores e intérpretes de Libras e a professores que ensinam matemática no trabalho com conceitos sobre funções em suas aulas. Mas, também, que possa servir como um rico material de estudo a estudantes de matemática ou qualquer pessoa que deseje aventurar-se por esse tema.

Desejamos uma boa leitura!



# SUMÁRIO



- 13      **Capítulo 1**  
Alguns Conceitos Elementares sobre Funções
- 25      **Capítulo 2**  
Função Polinomial do Primeiro Grau
- 39      **Capítulo 3**  
Função Polinomial do Segundo Grau
- 55      **Capítulo 4**  
Função Exponencial
- 71      **Capítulo 5**  
Função Logarítmica
- 81      **Capítulo 6**  
Função Periódica



# Alguns Conceitos Elementares sobre Funções

Para planejar uma viagem uma pessoa precisa organizar diversas coisas, tais como os locais para hospedagem, os meios de transporte a serem utilizados, os restaurantes para alimentação e os pontos turísticos a visitar, dentre outras. A organização do cronograma de viagem geralmente é realizada com base na quantidade de recursos financeiros disponíveis da pessoa viajante. Uma estratégia comum para iniciar esse tipo de planejamento é a análise da relação entre a quantidade de dias de viagem e o montante de recursos financeiros disponíveis por dia. Por exemplo, se uma pessoa possui G\$ 120,00 (cento e vinte GeCoins<sup>1</sup>) para gastar durante todo o período de

---

<sup>1</sup> GeCoin é o nome da moeda fictícia do Gepam, representada por “G\$” criada para todos os casos deste material que exigirem precificação em sua contextualização. A similaridade com o nome de uma famosa criptomoeda é mera coincidência. A criação do GeCoin foi inspirada nas iniciativas populares de moedas comunitárias como o CDD, moeda que circula no território da Cidade de Deus, no Rio de Janeiro. Além disso, o GeCoin é uma estratégia para que as especificações apresentadas neste texto não se tornem obsoletas frente à inflação ou alteração da moeda oficial.

viagem, quanto maior for a quantidade de dias viajando, menor será o valor médio de GeCoins disponível para custear os gastos diários. Na Tabela 1 há o detalhamento de algumas dessas relações entre a quantidade de dias viajando e o valor médio de GeCoins disponível por dia.

Quantidade de dias viajando	Valor GeCoins disponível por dia (G\$)
1	120,00
2	60,00
3	40,00
4	30,00
5	24,00

Tabela 1: Relação entre dias de viagem e valor médio de GeCoins por dia.

O valor médio de dinheiro disponível por dia é obtido dividindo-se o valor total disponível (G\$ 120,00) pela quantidade de dias pretendidos para a viagem. Podemos representar essa relação de uma maneira genérica, chamando de  $d$  a quantidade de dias viajando e  $v$  o valor médio de GeCoins por dia<sup>2</sup>. Com isso, é possível determinar uma equação que permite o cálculo da quantidade média de dinheiro disponível por dia com base na quantidade de dias de viagem.

<sup>2</sup> As letras  $d$  e  $v$  foram escolhidas por conveniência. Quaisquer outras letras poderiam ter sido tomadas para tal representação.



Figura 1: Equação relacionando a quantidade de dinheiro e o número de dias.

A Figura 1 mostra que o valor médio ( $v$ ) de GeCoins disponível por dia **depende** da quantidade de dias ( $d$ ) viajando. Essa relação de dependência está detalhada na Tabela 2.

Quantidade de dias de viagem	Cálculo $v = \frac{120}{d}$	Valor médio de GeCoins disponível por dia (G\$)
1	$v = \frac{120}{1} = 120$	120,00
2	$v = \frac{120}{2} = 60$	60,00
3	$v = \frac{120}{3} = 40$	40,00
4	$v = \frac{120}{4} = 30$	30,00
5	$v = \frac{120}{5} = 24$	24,00

Tabela 2: Tabela detalhando o cálculo do valor médio por dia.

Além de tabelas, em matemática também é comum o uso de outras formas de representação para esse tipo de análise. Dentre elas, destacamos aquela que é constituída por um **diagrama de flechas**, tal como indicado na figura a seguir.

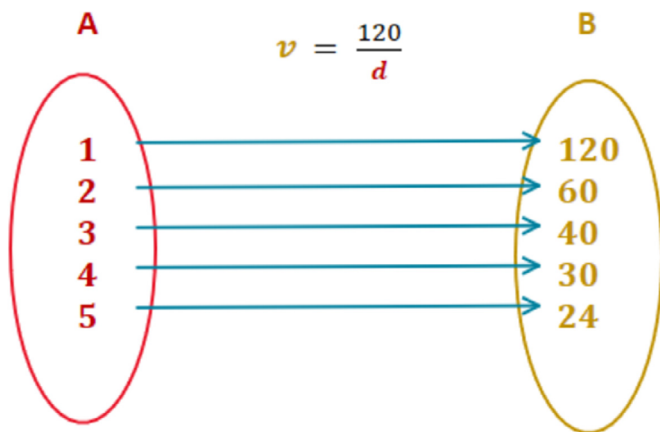


Figura 2: Diagrama de flechas.

Nesta representação as informações são dispostas dentro de figuras geométricas e associadas em pares por meio de flechas (setas). Essas figuras geométricas são chamadas de diagramas de Venn<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Um diagrama de Venn pode ser representado com qualquer forma geométrica plana e fechada. Uma das formas geométricas mais utilizadas em livros e por professores que ensinam matemática são as elipses, formas que se assemelham a circunferências achatadas. Todavia, nada impede que a forma geométrica utilizada seja um triângulo, um retângulo ou qualquer outra.



Observe que a relação entre as informações, no diagrama de Venn da Figura 2, é tal qual aquela apresentada anteriormente na Tabela 2. Dentro do primeiro diagrama, nomeado com a letra **A**, há alguns dos possíveis valores de  $d$  (quantidade de dias viajando). No segundo diagrama, nomeado com a letra **B**, há alguns dos possíveis valores de  $v$  (valor médio diário de GeCoins disponível). As flechas (setas) mostram como as quantidades de dias viajando, inscritas em **A**, relacionam-se com os valores médios diários de GeCoins, inscritos em **B**, por meio da relação  $v = \frac{120}{d}$ .

Ambos os diagramas, **A** e **B**, representados na Figura 2 podem ser vistos como **conjuntos** cujos **elementos** são os números lá inscritos<sup>4</sup>.

Então, no conjunto **A** os elementos são as quantidades de dias viajando, já no conjunto **B** os elementos são os valores médios de GeCoins disponíveis para cada dia de viagem. Além disso, tal como dito anteriormente, o valor médio diário de GeCoins, denotado por  $v$ , depende da quantidade de dias de viagem, representada por  $d$ .

---

<sup>4</sup> Em matemática, **um conjunto é uma coleção de objetos chamados de elementos**. Os elementos podem ser qualquer coisa (números, pessoas, informações, carros, móveis...). Geralmente um conjunto recebe um nome que, por convenção, deve ser uma letra do nosso alfabeto escrita com letra maiúscula. Ainda, as formas mais comuns para apresentar um conjunto são por meio de diagramas de Venn, como mostrado na Figura 1, e pela forma tabular. Na forma tabular, a letra que nomeia o conjunto é escrita do lado esquerdo de uma igualdade e do lado direito são listados os elementos do conjunto entre chaves e separados por vírgula. Por exemplo, os conjuntos A e B apresentados na Figuras 1 podem ser apresentados na forma tabular da seguinte forma:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{120, 60, 40, 30, 24\}$ .

Ou seja, há uma **relação de dependência** entre os elementos de **A** e de **B** e, ainda, essa relação é **única**, pois para cada elemento de **A** há apenas um elemento de **B** associado.

Relações entre dois conjuntos, tais como essa que apresentamos, são chamadas de **função**. Isso pode ser definido da seguinte forma:

**Uma função  $f$  é uma relação entre os elementos de dois conjuntos  $A$  e  $B$ , tal que todo elemento de  $A$  está relacionado com um único elemento de  $B$ . A notação usual para uma função é  $f: A \rightarrow B$  (lê-se:  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ ).**

É importante saber que:

- A letra  $f$  funciona como o nome da função (apresentado, por convenção, sempre em minúsculo), é o rótulo, escolhido arbitrariamente, por meio do qual identificamos a função em questão;
- As letras  $A$  e  $B$  indicam quais conjuntos participam da função. O conjunto  $A$  é chamado de **domínio da função  $f$**  (ou conjunto de partida) e o conjunto  $B$  é chamado de **contradomínio da função  $f$**  (ou conjunto de chegada);
- A seta ( $\rightarrow$ ) indica que a relação entre  $A$  e  $B$  é **orientada**. Isso significa que **existe uma relação de dependência** para determinar as associações dos elementos de  $A$  com os elementos de  $B$ , nesta ordem. Até porque essa associação é dada a partir dos elementos de  $A$  (elementos do domínio);

- Os elementos do conjunto  $A$  (domínio da função) são chamados de **variáveis independentes** e geralmente identificados pela letra  $x$ . Já os elementos do conjunto  $B$  (contradomínio da função) são chamados de **variáveis dependentes** e geralmente identificados pela letra  $y$ . Ou seja, na relação entre os elementos de  $A$  e de  $B$ , a associação com um elemento  $y$  de  $B$  **depende** do elemento  $x$  de  $A$ , por isso diz-se que  $y$  depende de  $x$ ;
- A **lei de formação da função**<sup>5</sup> é a regra de associação que determina como se dará a relação entre os elementos de  $A$  e  $B$ . A escrita simbólica disso é  $f(x)=y$ , que significa dizer que  $y$  é obtido a partir de um  $x$ , conforme a lei de formação de  $f$ .
- São duas as **condições para que uma relação seja classificada como uma função**: 1) Que **todos** os elementos do conjunto de partida estejam relacionados; 2) Que todos os elementos do conjunto de partida estejam relacionados a um **único** elemento do conjunto de chegada.

Conforme já argumentado, funções são objetos matemáticos utilizados para descrever, estudar e explorar relações de dependência entre conjuntos. É preciso dizer também que a dependência entre os elementos dos conjuntos e a lei de formação da função são forjadas conforme o interesse de análise. Ou seja, a lei de

---

<sup>5</sup> A lei de formação de uma função é, a rigor, apenas uma regra para associar os elementos dos conjuntos  $A$  e  $B$ . Essa regra não precisa ser necessariamente uma equação, pode ser também, por exemplo, uma sentença expressa com palavras.

formação que estabelece a relação de dependência entre os elementos dos conjuntos é construída de tal modo que permita a melhor análise matemática que se possa fazer. Em determinados casos tal tarefa pode ser mais simples, tal como a relação entre a medida do lado de um quadrado e a medida do perímetro desse mesmo quadrado (o perímetro é o quádruplo da medida do lado). Em outros casos pode ser extremamente complexa, tal como geralmente ocorre quando interpretamos fenômenos naturais por meio de funções (nos próximos capítulos haverá exemplos desse tipo). Isso quer dizer que as funções não são objetos matemáticos que existem por si só e que devemos descobri-las, ao contrário, nós utilizamos as funções para interpretar matematicamente diversas situações pois, se bem utilizadas, elas podem favorecer a nossa compreensão sobre um objeto de interesse (seja esse objeto algo da matemática ou de outra área do conhecimento).

Voltando ao nosso exemplo, a relação entre a quantidade de dias viajando e o valor médio diário de GeCoins disponíveis configura uma função, de forma que:

- O conjunto A contém algumas das possíveis quantidades de dias viajando ( $d$ ), que determinam os valores médios diários de GeCoins disponíveis;
- O conjunto B contém alguns dos valores médios diários de GeCoins ( $v$ ), que dependem da quantidade de dias viajando;
- **Todas** as quantidades de dias viajando se relacionam com um valor médio diário de GeCoins, ou seja, para

**todos** os elementos do conjunto A há uma relação com um elemento do conjunto B;

- Para cada quantidade de dias viajando, há uma **única** correspondência com um valor médio diário de GeCoins, ou seja, cada elemento do conjunto A se relaciona com um **único** elemento do conjunto B.
- Existe uma relação de dependência entre os elementos dos conjuntos A e B. Nessa relação a associação se dá a partir dos elementos de A, então A é o domínio e B é o contradomínio da função, indicados, respectivamente, por  $D(f)$  e  $CD(f)$ ;
- A lei de formação (regra de associação) que determina como os elementos de A se relacionam com os elementos de B é dada por  $f(d) = \frac{120}{d}$ .
- O valor médio diário de GeCoins ( $v$ ) é determinado pela quantidade de dias viajando ( $d$ ), então  $v$  é a **variável dependente** e  $d$  é a **variável independente**, tal como mostra a Figura 3.

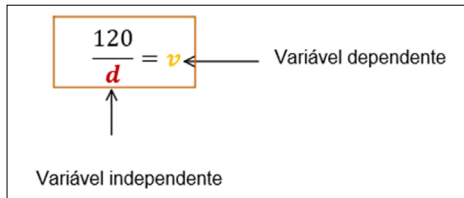


Figura 3: Lei de formação do valor médio diário

Quando se identifica um elemento  $y$  do contradomínio que se relaciona com um elemento  $x$  do domínio de uma função, dizemos que  $y$  é a imagem de  $x$ . Todos os valores de  $y$  do contradomínio que se relacionam com al-

um elemento  $x$  do domínio podem ser reunidos em um subconjunto<sup>6</sup> chamado de **imagem da função** e indicado por  $Im(f)$ . Dito de outra forma, **o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio em que figuram todos os elementos do contradomínio que se relacionam com algum elemento do domínio.**

Essa distinção dos elementos do contradomínio é necessária pois há funções em que alguns elementos do contradomínio não se relacionam com elementos do domínio. Por exemplo, se na situação exposta anteriormente o contradomínio  $B$  fosse  $B = \{120, 110, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10\}$ , nem todos os valores de  $B$  estariam relacionados com elementos de  $A$  (quantidades de dias viajando). A figura 4 ilustra esse caso por meio de um diagrama de flechas:

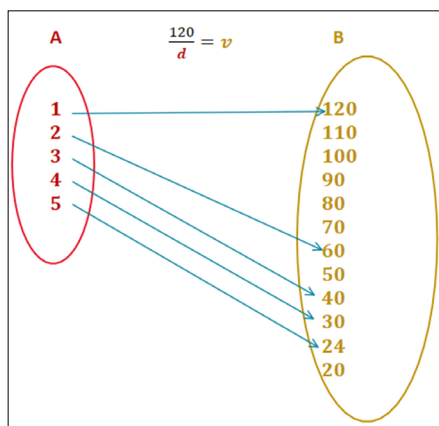


Figura 4: Diagrama de flechas.

<sup>6</sup> Se todos os elementos de um conjunto  $A$  também pertencerem a um conjunto  $B$ , então um subconjunto  $B$ , de um conjunto  $A$ , é um conjunto cujos elementos são todos também elementos do conjunto  $A$ .

Veja que há o mesmo domínio  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  mas no contradomínio  $B$  há novos valores de GeCoins. Importante destacar que, mesmo que nem todos os elementos do contradomínio estejam relacionados, essa relação continua sendo uma função, pois a condição de que todos os elementos do conjunto  $A$  se relacionem com um único elemento do conjunto  $B$  permanece satisfeita. Assim, o conjunto imagem dessa função, diferente do contradomínio  $B$ , é  $Im = \{120, 60, 40, 30, 24\}$ , em que figuram apenas os valores médios diários de GeCoins que estão relacionados com quantidades de dias viajando.

O estudo de funções não se esgota com o que foi exposto até aqui. Na verdade, essa foi apenas uma introdução com destaque para alguns conceitos fundamentais. As funções podem receber identificações especiais que são atreladas a singularidades da lei de formação. Assim, a partir do próximo capítulo, o estudo continuará com foco em alguns desses casos especiais de funções.





# Função Polinomial do Primeiro Grau

Uma das tarefas de uma pessoa que visita lugares em outras cidades é decidir o meio de transporte que irá utilizar. Diversos são os fatores a serem considerados, tais como a disponibilidade dos meios de transporte, o tempo de viagem e o tipo de experiência que se deseja vivenciar durante o passeio. Todavia, o custo para realizar os deslocamentos é um fator importante a ser considerado. Alguns meios de transporte não exigem cálculos complexos para que se possa determinar a quantia a ser desembolsada, como a passagem de ônibus ou de metrô. Porém, para aqueles que têm o custo atrelado ao tempo de deslocamento, como viagens contratadas por intermédio de aplicativos, alugueis de bicicleta e corridas de táxi, a história é outra. Apesar das particularidades destes meios de transporte, geralmente o custo é calculado da seguinte forma: uma taxa mínima pela contratação do serviço acrescida de um valor que leva em consideração o tempo e/ou a quilometragem percorrida. Essas estimativas de custos

com os deslocamentos durante viagens são ótimas para o estudo de um tipo especial de função: a **função polinomial do primeiro grau**<sup>7</sup> ou **função afim**.

Em um cenário em que um serviço possui seu preço calculado com o pagamento de G\$ 1,00 pela contratação e é acrescido de G\$ 0,20 para cada quilômetro percorrido, é possível analisar matematicamente a relação entre a distância percorrida e o valor a ser pago. Essa situação é semelhante àquela que apresentamos no capítulo anterior. Lá, a quantidade de dinheiro para cada dia de viagem dependia do número de dias viajando. Agora, acontece algo parecido: o valor a ser pago depende da distância percorrida.

Da mesma forma que fizemos anteriormente, é possível analisar essa situação atribuindo uma letra que identifique cada informação. O valor a ser pago pode ser representado pela letra  $v$  e a distância percorrida em quilômetros pode ser representada pela letra  $d$ . Assim, o valor a ser pago pode ser calculado pela equação  $v = 0,2 \cdot d + 1$ .

Para determinar o valor a ser pago em cada deslocamento basta substituir pelo total de quilômetros a serem percorridos, tal como mostrado na Tabela 3.

---

<sup>7</sup> Diz-se função polinomial do primeiro grau pois o maior expoente da variável independente na lei de formação desse tipo de função é 1. No próximo capítulo, estudaremos funções polinomiais do segundo grau que, por sua vez, apresentam em sua lei de formação a variável independente com maior expoente igual a 2. Isso se estende para funções polinomiais de terceiro grau, quarto grau, quinto grau, etc.

Quilômetros percorridos ( $d$ )	Cálculo $v = 0,2 \cdot d + 1$	Valor final ( $v$ )
0	$0,2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$	1,00
1	$0,2 \times 1 + 1 = 0,2 + 1 = 1,2$	1,20
2	$0,2 \times 2 + 1 = 0,4 + 1 = 1,4$	1,40
3	$0,2 \times 3 + 1 = 0,6 + 1 = 1,6$	1,60
4	$0,2 \times 4 + 1 = 0,8 + 1 = 1,8$	1,80
5	$0,2 \times 5 + 1 = 1 + 1 = 2$	2,00

Tabela 3: Detalhamento do cálculo do valor a ser pago de acordo com a quilometragem.

Veja que, se todas as quantidades de quilômetros percorridos forem reunidas em um conjunto chamado de  $A$  e se todos os valores a serem pagos forem reunidos em um conjunto chamado de  $B$ , essa relação atenderá a todos os requisitos para ser configurada como uma função  $f: A \rightarrow B$ , pois:

- Existe uma relação entre os elementos de  $A$  e os elementos de  $B$  que associa para cada distância  $d$  (variável independente) um valor  $v$  (variável dependente).  $A$  é o domínio da função e  $B$  é o contradomínio da função;
- Todas as distâncias  $d$  se relacionam com um valor  $v$  a ser pago, ou seja, para todos os elementos do conjunto  $A$  há uma relação com um elemento do conjunto  $B$ ;

- Para cada distância  $d$  percorrida, há uma única correspondência com um valor  $v$  a ser pago, ou seja, cada elemento do conjunto  $A$  se relaciona com um único elemento do conjunto  $B$ ;
- A lei de formação da função é  $f(x) = 0,2x + 1$ , em que  $x$  representa a quantidade de quilômetros percorridos.

É importante chamar atenção para o fato de que, diferentemente da situação exposta no capítulo anterior, analisar essa função por meio de diagramas de flechas não é uma estratégia vantajosa. Isso porque, matematicamente, há infinitos valores entre zero e cinco quilômetros percorridos. Nesses casos, costuma-se lançar mão de outra forma de representação que dê conta dessa grande (infinita) quantidade de relações: a **representação gráfica no plano cartesiano**.

O plano cartesiano é formado por eixos coordenados formados por duas retas numéricas perpendiculares (retas que possuem apenas um ponto em comum e cujo ângulo entre elas é de  $90^\circ$ ). Essas retas são graduadas e os valores exibidos geralmente são aqueles necessários para a construção dos objetos que se deseja representar. A reta horizontal é chamada de eixo  $x$  (ou eixo das abscissas) e a reta vertical é chamada de eixo  $y$  (ou eixo das ordenadas). O ponto em que essas retas se cruzam é chamado de origem e a origem está associada ao 0 (zero), tanto do eixo  $x$ , quanto do eixo  $y$ . A Figura 5 é uma representação de um plano cartesiano.

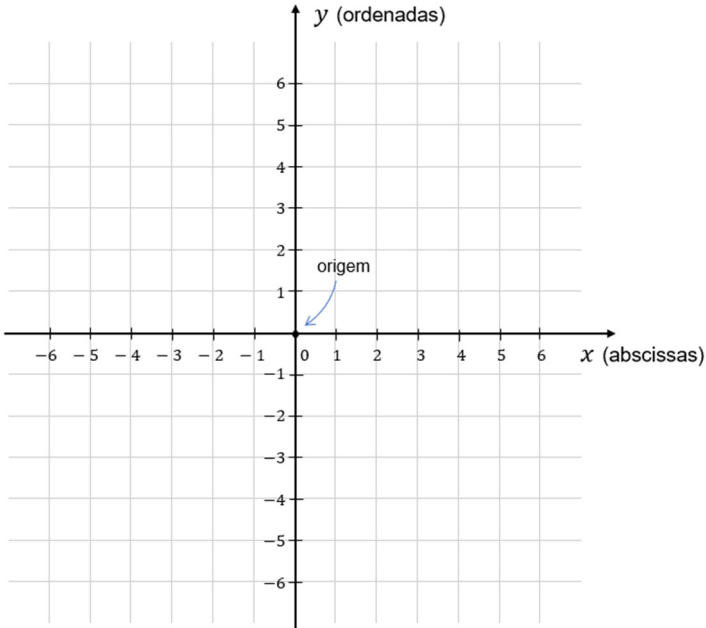


Figura 5: Plano cartesiano.

Um par ordenado  $(x, y)$  representado no plano cartesiano é dito um ponto do plano e, geralmente, é nomeado com uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Para localizar um par ordenado no plano cartesiano deve-se inicialmente localizar nos eixos coordenados os valores de  $x$  e de  $y$ , associados respectivamente aos eixos das abscissas e das ordenadas; depois deve-se traçar retas perpendiculares aos eixos coordenados que passem pelos valores de  $x$  e de  $y$  localizados. A Figura 6 contém um exemplo de localização de um par ordenado  $P(2, 3)$  no plano cartesiano.

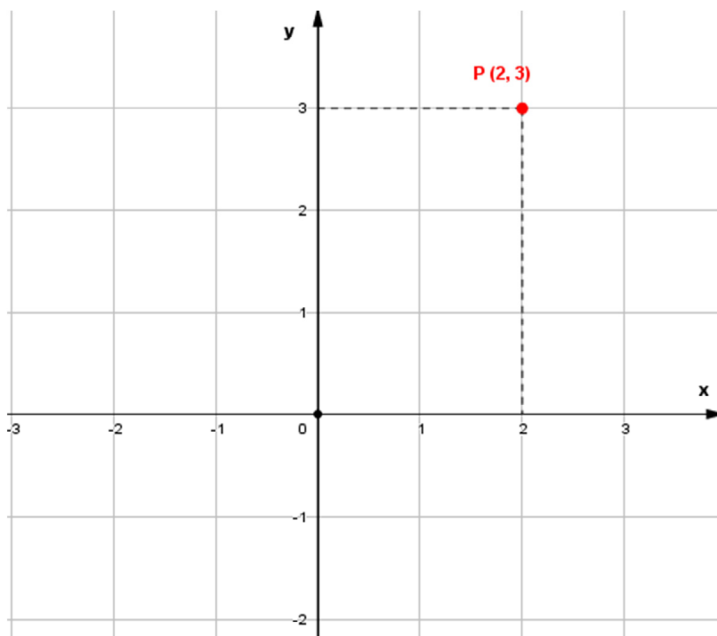


Figura 6: Representação do ponto  $P(2, 3)$  no plano cartesiano.

Em resumo, um plano cartesiano consiste em um sistema de coordenadas que permite determinar de forma única a posição de pontos no plano e, assim, representar formas geométricas (pontos, retas, polígonos, círculos, curvas, entre outros).

Para representar graficamente uma função no plano cartesiano, os valores do domínio da função devem ser localizados no eixo  $x$  e os valores do contradomínio da função no eixo  $y$ . Nesse sentido, considerando nosso exemplo da contratação de um serviço que possui seu preço calculado a partir de uma taxa fixa e uma variável, os valores do eixo  $x$  representam os valores da variável

independente  $d$  e os valores do eixo  $y$  representam os valores da variável independente  $v$ . Com isso, a lei de formação pode ser reescrita como  $y = 0,2x + 1$ . Na Tabela 4 há o cálculo de alguns pares ordenados que servirão de base para a representação gráfica dessa função (chame-mos função  $f$ ) no plano cartesiano.

Alguns valores do domínio (valores de $x$ )	Cálculo por meio da lei de formação	Valores das imagens (valores de $y$ )	Pares ordenados
0	$0,2 \cdot 0 + 1$	1	A(0; 1)
4	$0,2 \cdot 4 + 1$	1,8	B(4; 1,8)
8	$0,2 \cdot 8 + 1$	2,6	C(8; 2,6)
12	$0,2 \cdot 12 + 1$	3,4	D(12; 3,4)
16	$0,2 \cdot 16 + 1$	4,2	E(16; 4,2)
20	$0,2 \cdot 20 + 1$	5	F(20; 5)
24	$0,2 \cdot 24 + 1$	5,8	G(24; 5,8)

Tabela 4: Tabela detalhando o cálculo para determinar os pares ordenados.

A representação gráfica da função  $g$  deve ser o conjunto de todos os infinitos pares ordenados  $(x, y)$  marcados no plano cartesiano. Perceba que não é necessário calcular todos os infinitos pares ordenados (nem seria possível!), pois neste caso é sabido que entre quaisquer dois pares ordenados há outros infinitos pares que res-

peitam a mesma relação. Por isso, com apenas alguns pares ordenados marcados no plano cartesiano é possível representar todos os demais, bastando conectar tais pontos no plano, conforme mostrado na Figura 7.

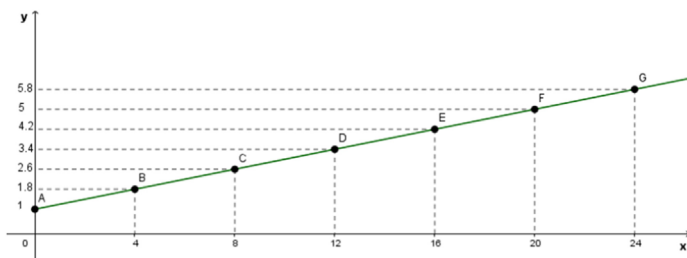


Figura 7: Representação gráfica da função  $f$ .

Diferentemente da representação por diagramas de flecha, a representação gráfica da função permite a visualização de uma parte das infinitas relações entre a quantidade de quilômetros percorridos e o valor a ser pago pelo deslocamento, neste caso, representada por uma semireta com origem no ponto A (veja Figura 6).

Toda função cuja representação gráfica seja dada por uma reta é chamada de **função polinomial do primeiro grau (ou função afim)**. Ela é definida da seguinte forma:

**Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será chamada de função polinomial do primeiro grau quando para todo número  $x \in \mathbb{R}$  associa-se o número  $ax+b$ , com  $a$  e  $b$  reais, sendo  $a \neq 0$ .**



O coeficiente **a** é chamado de taxa de variação da função ou coeficiente angular; já **b** é chamado de coeficiente linear da função. Assim sendo, a função  $f(x) = 0,2x + 1$  é um exemplo de função polinomial do primeiro grau<sup>8</sup>, com taxa de variação igual a 0,2 e coeficiente linear igual a 1.

Outra situação que pode ser analisada por meio de uma função polinomial do primeiro grau e que ainda está envolvida com a análise do custo para deslocamentos por meio de um determinado meio de transporte é o cálculo do saldo do cartão de bilhetagem eletrônica de ônibus conforme cada passagem é paga.

Suponha que haja um saldo de G\$ 16,00 em um cartão de bilhetagem eletrônica, que cada passagem custe G\$ 1,00 e que uma pessoa gaste 4 passagens por dia. Note que, conforme aumenta a quantidade de dias, a quantia do saldo do cartão diminui. Além disso, o saldo do cartão depende da quantidade de dias em que a pessoa o utiliza para fazer seus deslocamentos. Dito de outra forma, o saldo do cartão depende da quantidade de dias de uso. Assim, uma análise possível se dá por meio da função  $f$ , que relaciona o saldo  $y$ , restante no cartão de bilhetagem eletrônica de ônibus, e a quantidade  $x$  de dias de deslocamento, determinada pela lei de formação  $f(x) = 16 - 4x$ . Na Figura 8 há a representação gráfica<sup>9</sup> da função  $f(x) = 16 - 4x$ .

---

<sup>8</sup> Funções do primeiro grau que possuem o coeficiente  $b$  igual a zero são chamadas de função linear. Ex.:  $fx = 2x$  ;  $gx = -4x$ .

<sup>9</sup> Optou-se por utilizar o domínio contínuo de  $[0, 4]$  para facilitar a explicação sobre crescimento e decréscimo da função.

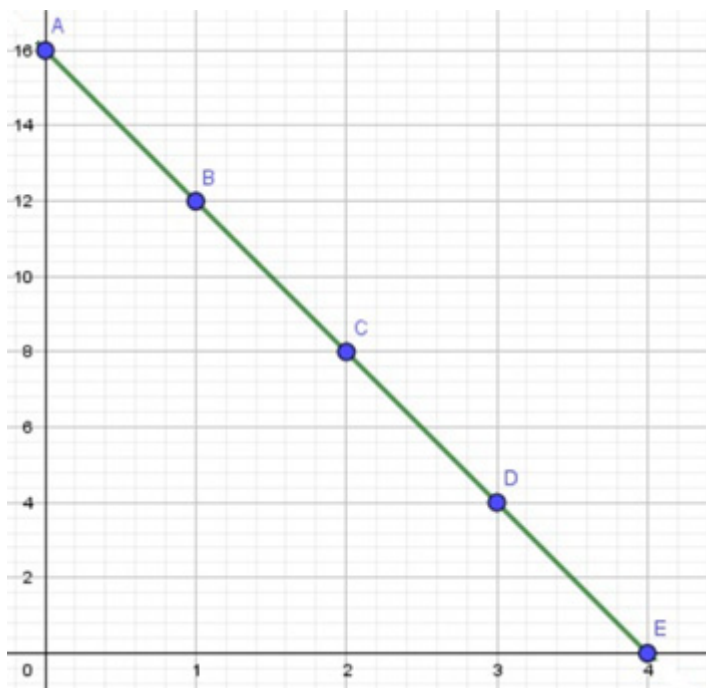


Figura 8: Representação gráfica da função  $f(x) = 16 - 4x$ .

A partir da análise da representação gráfica da função (conforme a Figura 8) é possível notar que após um dia de deslocamentos o saldo no cartão será de G\$ 12,00. Após dois dias de deslocamentos o saldo será de G\$ 8,00. Passados três dias de deslocamentos o saldo ficará em G\$ 4,00. Por fim, o saldo será de zero quando a pessoa completar quatro dias de deslocamentos.

A partir da observação das representações gráficas das funções polinomiais do primeiro grau no plano cartesiano, é importante destacar que há funções do primeiro grau

classificadas como funções **crescentes** e funções do primeiro grau classificadas como funções **decrescentes**. Um exemplo de função do primeiro grau crescente é a função  $f(x) = 0,2x + 1$ . Nesse caso, conforme os valores de  $x$  aumentam, os valores de  $y$  também aumentam. Por outro lado, se considerarmos a função  $f(x) = 16 - 4x$ , conforme os valores de  $x$  aumentam, os valores correspondentes de  $y$  diminuem, caracterizando uma função decrescente. Por sorte, não é necessário construir a representação gráfica da função polinomial do primeiro grau para determinar se ela é do tipo crescente ou decrescente. Basta olhar o valor do coeficiente  $a$ . Se  $a$  for maior do que zero (tal como no caso da função  $f(x) = 0,2x + 1$  em que  $a = 0,2$ ), a função será crescente. Se  $a$  for menor do que zero (tal como no caso da função  $f(x) = 16 - 4x$  em que  $a = -4$ ), a função será decrescente. A Figura 9 sintetiza a relação entre a posição da reta que representa a função polinomial do primeiro grau no plano cartesiano e o valor do coeficiente  $a$ .

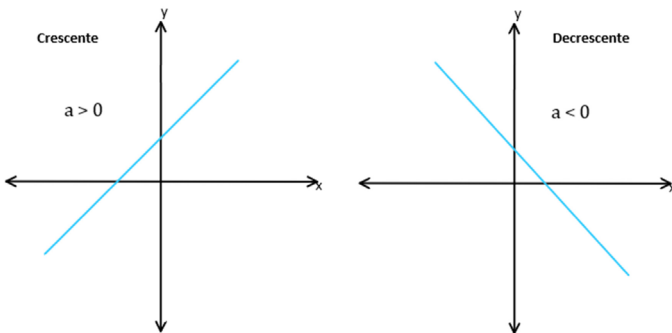


Figura 9: Relação entre o coeficiente angular e o crescimento ou decréscimo da função polinomial do primeiro grau.

Ainda observando as representações gráficas das funções polinomiais do primeiro grau no plano cartesiano, é importante chamar atenção para o ponto de intersecção da reta com o eixo das abcissas (eixo x). Esse ponto possui coordenada  $(x, 0)$  e o valor de  $x$  é chamado de **raiz ou zero da função**. Dito de outra forma, o zero da função polinomial do primeiro grau é o valor de  $x$ , do domínio, tal que  $f(x) = 0$ , ou seja, o valor de  $x$  quando  $ax+b=0$ . Do que resulta:

$$ax+b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -b/a$$

Por exemplo, na Figura 8 é possível perceber que o zero da função é  $x = 4$ , pois é no ponto  $(4, 0)$  que a reta que representa a função intersecta o eixo x. A Figura 10 destaca de maneira genérica o local do zero da função polinomial do primeiro grau no plano cartesiano.

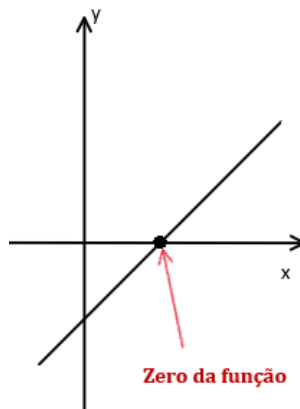


Figura 10: Zero da função no plano cartesiano.

Outra intersecção importante se dá entre a reta que representa a função polinomial do primeiro grau e o eixo  $y$  do plano cartesiano. Neste caso, o ponto de intersecção possui coordenada  $(y, 0)$ . O valor de  $y$  coincide com o valor do coeficiente linear da função. Isso acontece pois, para qualquer função polinomial do primeiro grau, ao substituir  $x$  por zero na lei de formação da função, restará apenas o valor de  $b$  (coeficiente linear). Graficamente, o valor do coeficiente linear corresponde à ordenada onde a reta intersecta o eixo  $y$ .

A Figura 11 destaca de maneira genérica o local da intersecção da reta que representa a função polinomial do primeiro grau com o eixo  $y$  do plano cartesiano, tanto para uma função do tipo crescente quanto para uma função do tipo decrescente.

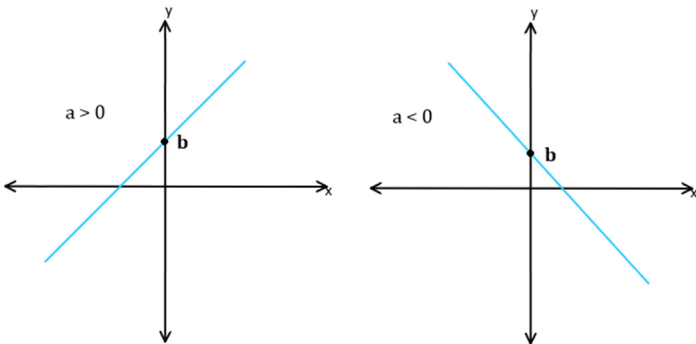


Figura 11: Coeficiente linear indica o local da intersecção da reta com o eixo  $y$ .

As funções polinomiais do primeiro grau são um caso especial de função polinomial e podem ser utilizadas,

em alguns casos (funções lineares), para a interpretação de dados que estão ligados a contextos que apresentam proporcionalidade linear. A discussão realizada até aqui mostrou apenas alguns conceitos elementares e aplicações básicas, mas servem como ponto de partida para o vasto estudo possível a ser realizado sobre as funções polinomiais do primeiro grau. No capítulo seguinte, o estudo se dará a partir de outro caso especial de função polinomial, a função polinomial do segundo grau.

# Função Polinomial do Segundo Grau

É muito comum encontrar nas margens de rodovias vendedores de diversos tipos de produtos, tais como alimentos e peças de vestuário. No Sul do Brasil, por exemplo, milho, pinhão e morangos são facilmente encontrados em beiras de estrada. Dependendo da região, não é difícil que haja vários pontos de venda do mesmo produto. Entretanto, o preço desses produtos costuma variar entre um ponto de venda e outro, inclusive entre pontos de venda bem próximos. É evidente que diferentes fatores influenciam no preço de venda, dentre eles podemos destacar: qualidade, transporte, custo e demanda. Um pouco de matemática ajuda, e muito, a compreender como o valor de um produto pode ser estabelecido de forma a garantir a receita máxima ao estabelecimento. Vejamos como!

Vamos tomar como exemplo uma pessoa que vende 40 espigas de milho por dia, cada espiga vendida por

G\$ 3,50<sup>10</sup>. Essa pessoa está disposta a diminuir o preço de venda, caso isso se converta em uma receita diária maior e, para tanto, fez uma pesquisa de mercado. Como o mercado tende a ser algo extremamente complexo, analisá-lo como um todo pode se mostrar uma tarefa difícil. Por este motivo, a pessoa optou por uma pesquisa de mercado simplificada (mas, nem por isso, menos poderosa) com o objetivo de analisar a relação entre apenas duas variáveis: o preço da espiga e a receita diária (total arrecadado no fim do dia).

O primeiro passo da pesquisa foi variar o preço de venda das espigas e verificar como tal variação impactava a receita diária. Dentre o universo de preços possíveis para a venda das espigas, a análise foi realizada com um teste de apenas onze valores. Isto é, durante onze dias a pessoa variou o preço de venda das espigas e observou o impacto na receita diária. Essa pessoa notou que reduzir o preço de venda de cada espiga em G\$ 0,10 aumentava a venda de espigas em duas espigas a mais por dia. Estes valores, bem como a receita diária gerada por cada um, são apresentados na Tabela 5.

---

<sup>10</sup> Este contexto foi inspirado no problema “A receita máxima” (IEZZI et al., 2016, p. 105-106).



<b>Dia</b>	<b>Preço da espiga (R\$)</b>	<b>Número de espigas vendidas por dia</b>	<b>Receita diária (G\$)</b>
0	<b>3,50</b>	40	$3,5 \cdot 40 = 140,00$
1	<b>3,40</b>	42	$3,4 \cdot 42 = 142,80$
2	<b>3,30</b>	44	$3,3 \cdot 44 = 145,20$
3	<b>3,20</b>	46	$3,2 \cdot 46 = 147,20$
4	<b>3,10</b>	48	$3,1 \cdot 48 = 148,80$
5	<b>3,00</b>	50	$3 \cdot 50 = 150,00$
6	<b>2,90</b>	52	$2,9 \cdot 52 = 150,80$
7	<b>2,80</b>	54	$2,8 \cdot 54 = 151,20$
8	<b>2,70</b>	56	$2,7 \cdot 56 = 151,20$
9	<b>2,60</b>	58	$2,6 \cdot 58 = 150,80$
10	<b>2,50</b>	60	$2,5 \cdot 60 = 150,00$
11	<b>2,40</b>	62	$2,4 \cdot 62 = 148,80$

Tabela 5: Tabela detalhando a relação entre o preço da espiga de milho e a receita diária.

Observe que o valor de venda inicial, de G\$ 3,50, é um dos que gera menor receita diária para a pessoa que vende milho. Isso porque a receita diária de G\$ 140 se repete quando o valor de venda das espigas é de G\$ 2,00. Repare também que diferentes preços para a espiga de

milho produzem<sup>11</sup> receitas diárias diferentes. De fato, até os dias 7 e 8 os descontos proporcionam uma receita maior (G\$ 151,20). Todavia, a partir do dia 9 a receita passou a decrescer.

Também chama atenção o fato de que as receitas se repetem para diferentes valores de venda da espiga de milho, tal como no caso de valores de venda por G\$ 2,50 e por G\$ 3,00 (dias 5 e 10), em que ambos produzem uma receita de G\$ 150,00. Na Tabela 6 há os pares de preço de venda da espiga que resultaram na mesma receita diária.

Preço da espiga (R\$)	Receita diária (G\$)
2,40 e 3,10	148,80
2,50 e 3,00	150,00
2,60 e 2,90	150,80
2,70 e 2,80	151,20

Tabela 6: Pares de valores de venda de cada espiga de milho que possuem a mesma receita diária.

Perceba que uma (simples) pesquisa de mercado pode produzir dados, no mínimo, curiosos. Este tipo de situação pode ser analisada por meio de uma função, pois

<sup>11</sup> Evidente que diferentes fatores (como, por exemplo, as condições meteorológicas e o dia da semana em questão) podem afetar a receita diária da pessoa que vende milho. Lembre-se que a escolha foi a de isolar apenas duas variáveis: o preço da espiga e a receita diária. Então, para os efeitos desta pesquisa, desconsidera-se a influência dos demais fatores, assumindo-se que toda e qualquer variação da receita diária é causa direta da variação no preço da espiga.

há uma relação de dependência entre os descontos e as receitas. Ainda, para cada desconto há apenas um valor de receita que se associa. Porém, perceba que neste caso o contradomínio da função é o conjunto formado pelos valores das receitas diárias, mas o domínio pode ser formado tanto pelo conjunto dos dias analisados ( $D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ) quanto pelos valores de venda das espigas de milho ( $D(f) = \{3,50; 3,40; 3,30; 3,20; 3,10; 3,00; 2,9; 2,8; 2,7; 2,6; 2,5; 2,4\}$ ).

Assim como dito no capítulo anterior, a construção de uma função para a análise de uma situação pode ser realizada conforme o interesse de investigação. Nesse caso, interessa-nos que o domínio da função seja o conjunto dos valores de venda da espiga de milho, pois a pessoa deseja descobrir o valor ideal da venda da espiga de milho para obter a maior receita possível, não o dia em que a receita foi a maior.

Os dados da Tabela 5 podem ser reorganizados em pares ordenados  $(x; y)$  que relacionam os preços de venda das espigas e os valores das receitas diárias, conforme mostra a Tabela 7.

Preço da espiga (R\$)	Receita diária (G\$)	Par ordenado $(x; y)$
3,50	140,00	A (3,50; 140,00)
3,40	142,80	B (3,40; 142,80)
3,30	145,20	C (3,30; 145,20)
3,20	147,20	D (3,20; 147,20)
3,10	148,80	E (3,10; 148,80)

3,00	150,00	$F(3,00; 150,00)$
2,90	150,80	$G(2,90; 150,80)$
2,80	151,20	$H(2,80; 151,20)$
2,70	151,20	$I(2,70; 151,20)$
2,60	150,80	$J(2,60; 150,80)$
2,50	150,00	$K(2,50; 150,00)$
2,40	148,80	$L(2,40; 148,80)$

Tabela 7: Pares ordenados  $(x; y)$  que relacionam o valor de venda de cada espiga de milho e a respectiva receita diária.

Observe na Figura 12 a representação no plano cartesiano dos pares ordenados indicados na Tabela 7.

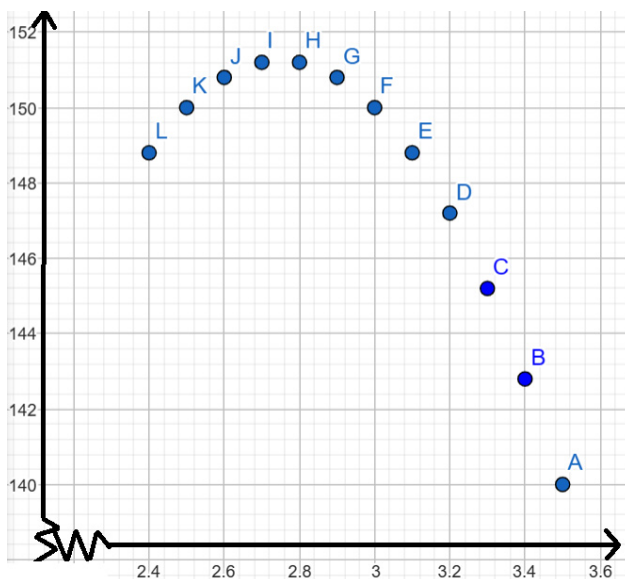


Figura 12: Representação geométrica dos pares ordenados da terceira coluna da Tabela 7.

De partida, podemos observar, assim como observamos nas Tabelas 5 e 6, que diferentes preços por espiga (representados no eixo  $x$ ) relacionam-se a um mesmo valor de receita diária (representado no eixo  $y$ ). Atente, por exemplo, aos pontos F e K (com abscissas 2,50 e 3,00, respectivamente), ambos possuem o mesmo valor no eixo  $y$  (150). De fato, pode-se reunir os pontos em pares, como foi feito na Tabela 6, e perceber que cada um dos elementos do par é, senão, a reflexão do outro por uma reta vertical, indicada na Figura 13 (na cor vermelha). Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e localiza-se na metade da distância horizontal entre os pares ordenados que possuem o mesmo valor no eixo  $y$ .

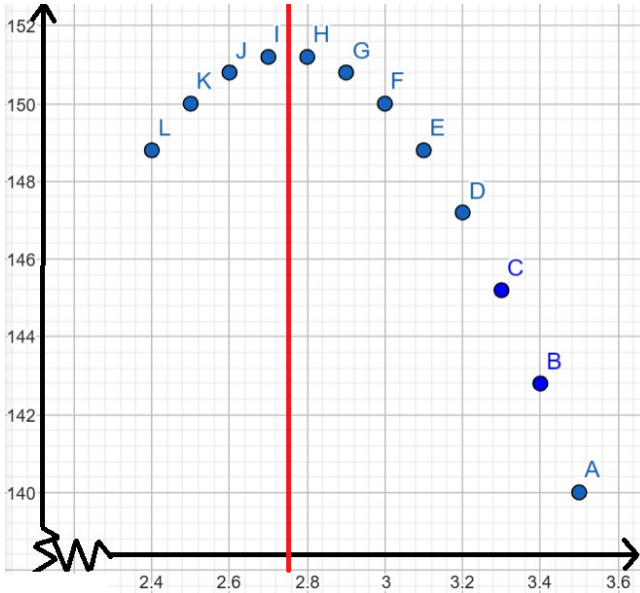


Figura 13: Eixo de simetria.

Pode-se descobrir a coordenada  $x$  do eixo de simetria calculando a média aritmética entre as abscissas (coordenadas do eixo  $x$ ) de dois pontos que possuem o mesmo valor no eixo  $y$ . Por exemplo, a média aritmética entre as abscissas (coordenadas dos eixos  $x$ ) dos pontos  $F$  e  $K$  é dada pelo seguinte cálculo:

$$\frac{2,50 + 3,00}{2} = \frac{5,5}{2} = 2,75$$

Logo, da observação da representação gráfica dos dados coletados pela pessoa que vende espigas de milho, percebe-se que tais dados se distribuem, no plano cartesiano, de forma a espelhar uns aos outros a partir do eixo de simetria que possui abscissa  $x = 2,75$ . Além disso, observe que, quanto mais próximo um ponto está do eixo de simetria, maior é a sua coordenada no eixo  $y$ , isto é, maior é a receita diária. Vale também o contrário, quanto mais distante do eixo de simetria um ponto estiver, menor será a sua coordenada no eixo  $y$  e, portanto, menor será a receita diária.

Com isso, conseguimos deduzir para qual valor de venda da espiga de milho haverá a receita diária máxima. Ora, se quanto mais próximo do eixo de simetria um ponto está maior é a receita diária, então a receita máxima deve ser aquela que é a coordenada  $y$  do ponto que estiver sobre o eixo de simetria, ou seja, um ponto que possui coordenada  $(2,75, y)$ . Logo, a receita máxima será obtida quando a pessoa vender cada espiga de milho pelo valor de G\$ 2,75.

A análise realizada até aqui para esta situação está intimamente associada com um tipo especial de função chamada de **Função Polinomial do Segundo Grau** ou, simplesmente, **função quadrática**. Tais funções quando representadas no plano cartesiano traçam curvas chamadas de **parábolas**, tal como mostrado na Figura 14.



Figura 14: Curvas chamadas de parábolas.

Os pontos apresentados na Figura 13 podem ser conectados de forma que sejam pertencentes a uma parábola. Por isso, convém analisar a relação entre o preço de venda das espigas de milho e a receita diária por meio de uma função polinomial do segundo grau. Cabe dizer que, assim como a função polinomial do primeiro grau apresentada no capítulo anterior, a função polinomial do segundo grau também possui uma definição matemática com uma forma geral.

**Uma função  $f: R \rightarrow R$  será chamada de função polinomial do segundo grau quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f$  associa  $x$  a  $ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in R$ .**

Os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  são chamados de **coeficientes**. A restrição para o coeficiente  $a$  ser diferente de zero se dá pelo fato de que uma equação do tipo  $0x^2 + bx + c$  é equivalente a uma equação do tipo  $bx + c$ . Assim como visto no capítulo anterior, a equação  $bx + c$  seria uma lei de formação de uma função polinomial do primeiro grau. A diferença entre a lei de formação de uma função polinomial do primeiro grau para uma lei de formação de uma função polinomial do segundo grau se dá justamente pelo acréscimo do termo  $ax^2$  nesta última.

Em matemática, quando temos um termo elevado ao expoente dois, este termo também pode ser lido como “**ao quadrado**”, tal como é o caso do termo  $ax^2$  em que se lê “a vezes xis ao quadrado” ou, simplesmente, “a xis ao quadrado”. É justamente pela ocorrência do termo  $ax^2$  nas funções quadráticas que estas recebem este nome. É também devido a este expoente “**dois**” que este tipo de função pode ser chamado de função polinomial do **segundo grau**.

No estudo sobre a maior receita diária para a venda de espigas de milho, uma lei de formação que nos permite fazer a mesma investigação é dada por  $f(x) = -0,2x^2 + 3x + 140$ , sendo  $x$  o número do dia da análise de mercado. Nesse caso os coeficientes são:  $a = 0,2$ ,  $b = 3$  e  $c = 140$ .

Com a lei de formação da função polinomial do segundo grau, é possível calcular a imagem da mesma forma como se calcula nos casos de funções polinomiais do primeiro grau: basta substituir a variável  $x$  por um valor do domínio da função e realizar as operações; o resulta-



do é o valor imagem  $y$  associada ao valor do domínio  $x$  substituído inicialmente. Por exemplo, tomada a lei de formação  $f(x) = -0,2x^2 + 3x + 140$  e considerando o domínio  $(D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\})$ , temos que:

Para  $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= -0,2(0)^2 + 3(0) + 140 = \\ &0 + 0 + 140 = \\ &140 \end{aligned}$$

Para  $x = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= -0,2(1)^2 + 3(1) + 140 = \\ &-0,2 + 3 + 140 = \\ &142,8 \end{aligned}$$

Para  $x = 2$

$$\begin{aligned} f(2) &= -0,2(2)^2 + 3(2) + 140 = \\ &-0,2 \cdot 4 + 6 + 140 = \\ &145,2 \end{aligned}$$

Para  $x = 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= -0,2(3)^2 + 3(3) + 140 = \\ &-0,2 \cdot 9 + 9 + 140 = \\ &147,2 \end{aligned}$$

... e assim por diante.

Além de ser um método prático para calcular imagens a partir dos valores do domínio, a lei de formação da função polinomial do segundo grau ainda nos diz outras coisas muito úteis. Por exemplo, antes de representar geometricamente no plano cartesiano uma função polinomial do segundo grau é possível saber, a partir do valor do coeficiente  $a$  da lei de formação, a **concavidade da parábola**, ou seja, se a parábola associada à função quadrática estará no plano cartesiano voltada para cima (parecida com a letra U) ou para baixo (parecida com a letra U de cabeça para baixo).

**Quando  $a > 0$ , a concavidade estará voltada para cima e nesse caso a função terá ponto mínimo, ou seja, haverá um valor mínimo no contradomínio. Quando  $a < 0$ , a concavidade estará voltada para baixo e nesse caso a função terá ponto máximo, ou seja, apresentará um valor máximo no contradomínio**, tal como no caso da receita máxima da venda de espigas de milho. A Figura 15 sintetiza a relação entre o valor do coeficiente  $a$  da função polinomial do segundo grau e a concavidade da parábola que representa graficamente a função no plano cartesiano.



Figura 15: Relação entre o valor do coeficiente  $a$  da lei de formação da função polinomial do segundo grau e a concavidade da parábola associada.

O ponto de máximo ou de mínimo da parábola é um ponto  $V$  (par ordenado) no plano cartesiano chamado de **vértice**. Nas parábolas com concavidade voltada para **cima** o vértice será o **ponto de mínimo**, já nas parábolas com concavidade voltada para **baixo** o vértice será o **ponto de máximo**. A Figura 16 destaca a localização do vértice  $V$  de uma parábola côncava para cima e de uma parábola côncava para baixo.

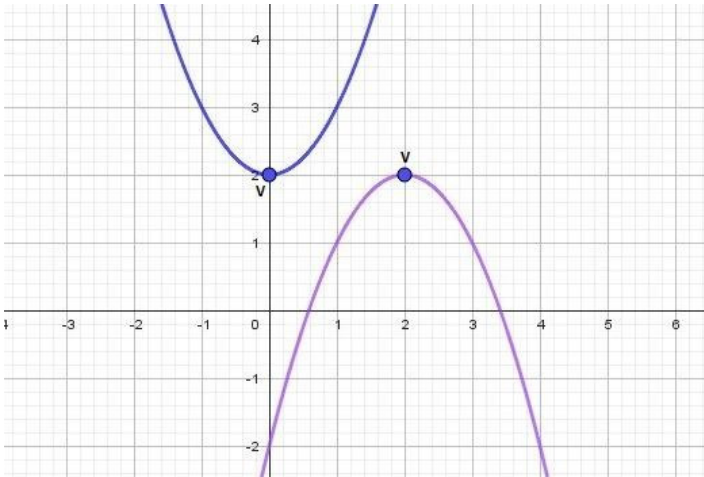


Figura 16: Parábola côncava para cima com o vértice destacado e parábola côncava para baixo com o vértice destacado.

Há uma fórmula útil para calcular as coordenadas  $(x, y)$  do vértice que utiliza apenas as informações dos coeficientes da lei de formação da função polinomial do segundo grau. Para determinar o valor da abscissa do vértice, basta utilizar a fórmula  $x_v = -\frac{b}{2a}$ . Para calcular

a ordenada do vértice, a fórmula é  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ , sendo que  $\Delta$  é o resultado da expressão  $\Delta = b^2 - 4.a.c.$

Por fim, assim como discutido no Capítulo 2, os zeros ou raízes de uma função são todos os valores  $x$ , do domínio, tal que  $f(x) = 0$ . Graficamente, as raízes correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intercepta o eixo  $x$ . Logo, para se estabelecer as raízes de uma função polinomial do segundo grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , pode-se substituir  $f(x)$  por zero e resolver a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ . A solução desta equação corresponde aos zeros da função polinomial do segundo grau e pode ser obtida por diversos meios, um deles é popularmente conhecido como fórmula de Bhaskara<sup>12</sup> apresentada a seguir:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ sendo } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Neste capítulo foram apresentados e discutidos elementos básicos sobre as Funções Polinomiais do Segundo Grau. Não foram esgotadas todas as possibilidades de

---

<sup>12</sup> A fórmula que determina as soluções de uma equação do segundo grau é comumente chamada de Fórmula de Bhaskara. Todavia, é importante ressaltar que outros povos, tal como os egípcios, já sabiam resolver problemas, que hoje compreendemos por meio de equações do segundo grau, antes do nascimento de Bhaskara. É apenas no Brasil que a fórmula é conhecida como Fórmula de Bhaskara.

estudo e aplicabilidades desse tipo de função polinomial. Cabe pontuar que na Educação Básica o estudo das funções quadráticas está em estreita relação com equações do segundo grau. No próximo capítulo, o foco de análise serão as funções exponenciais.



# Função Exponencial

Uma das coisas mais temidas pelos viajantes que optam por viajar de carro é um problema mecânico no veículo durante o percurso. Qualquer imprevisto exige que a manutenção do veículo seja realizada por profissional especializado para que esteja garantida a segurança de todos os passageiros. Quando o incidente ocorre na região onde a pessoa mora, geralmente já existe uma oficina de preferência a ser procurada, mas quando é necessário buscar locais de manutenção veicular em cidades em que a pessoa não reside a história já é outra. O comum é utilizar um *site* de buscas e procurar quais oficinas estão mais próximas e depois decidir onde buscar ajuda. É aí que uma difícil tomada de decisão pode ser necessária, pois, a depender do tipo de serviço e do tempo para executar a manutenção, pode haver uma grande quantidade de opções para deixar o carro em bom funcionamento.

Se numa cidade, por exemplo, há duas oficinas mecânicas, a *Mecânica Roda Bem* e a *Oficina do Zé Rodinha*,

que ofertam os mesmos dois tipos de serviço, o *básico* e o *completo*, que contam ainda com duas modalidades diferentes de prazo para execução, a *expressa* e a *pronto ao fim do dia*, a quantidade de opções a serem consideradas pode se tornar uma grande dor de cabeça. Perceba que para cada uma das **duas** oficinas existem **dois** tipos de serviços e para cada tipo de serviço existem ainda mais **duas** modalidades de execução, totalizando assim **oito** possibilidades diferentes para contratar a manutenção do carro, levando-se em consideração uma oficina, um tipo de serviço e uma modalidade de execução! Na Tabela 8 há a lista de todas as oito possibilidades.

Possibilidade	Oficina	Tipo de serviço	Modalidade de execução
P1	Mecânica Roda Bem	básico	expressa
P2	Mecânica Roda Bem	básico	pronto ao fim do dia
P3	Mecânica Roda Bem	completo	expressa
P4	Mecânica Roda Bem	completo	pronto ao fim do dia
P5	Oficina do Zé Rodinha	básico	expressa
P6	Oficina do Zé Rodinha	básico	pronto ao fim do dia
P7	Oficina do Zé Rodinha	completo	expressa
P8	Oficina do Zé Rodinha	completo	pronto ao fim do dia

Tabela 8: Possibilidades de contratação do serviço de manutenção do pneu do carro.



Além de listar e contar todas as opções, tal como mostrado na Tabela 8, também é possível calcular de forma mais rápida a quantidade de opções de contratação do serviço de manutenção do carro utilizando a operação de **multiplicação**. Multiplicar a quantidade de oficinas (duas) pela quantidade de tipos de serviços disponíveis (dois) e, depois, multiplicar o resultado obtido pela quantidade de modalidades de execução (duas), resulta na quantidade total de possibilidades de contratação do serviço. Esse raciocínio pode ser representado matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot 2 &= \\ 4 \cdot 2 &= \\ 8 & \end{aligned}$$

Nesses casos em que a multiplicação envolve sempre o mesmo fator (2), também é possível expressar a quantidade de opções de contratação do serviço de manutenção do carro utilizando-se o que chamamos de **potenciação**.

Uma potenciação é uma *operação matemática*, indicada por  $a^n = b$ . Em uma potenciação sempre é possível identificar três elementos: a base, o expoente e a potência. Em que:

- a **base** é representada pelo número  $a$ ;
- o **expoente** é representado pelo número  $n$  (Perceba que na notação  $a^n$  o  $n$  é escrito no canto superior direito da  $a$ , em tamanho reduzido);

- A **potência** é representada por  $a^n$ . O resultado dessa operação é indicado por  $b$ .

A depender do valor do expoente há diferentes procedimentos para se calcular o valor da potência (resultado)<sup>13</sup>.

- i) Potenciação com expoente inteiro e maior do que 1:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

multiplicação de  $n$  fatores  $a$

- ii) Potenciação com expoente igual a 1:

$$a^1 = a$$

- iii) Potenciação com expoente igual a zero:

$$a^0 = 1, \text{ base diferente de zero}$$

- iv) Potenciação com expoente inteiro e menor do que zero:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ base diferente de zero}$$

Por isso, a quantidade de opções de contratação do serviço de manutenção do carro também pode ser calculada por meio da operação de potenciação, tal como mostrado a seguir:

---

<sup>13</sup> É possível calcular potências, por exemplo, com expoentes reais (racionais, irracionais) e também complexos. Contudo, foge do escopo deste material uma discussão detalhada de como proceder nestes casos (e em outros que não citamos).

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

multiplicação de 3 fatores 2

Perceba, que:

- a **base** da potenciação é **2** (quantidade de opções);
- o **expoente** da potenciação é **3** (quantidade de escolhas);
- a **potência** é  $2^3$  e seu valor é  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  (total de possibilidades).

Ainda sem sair do universo automobilístico, outra situação que por vezes é pauta de discussões entre amigos e familiares é a decisão da compra ou venda de um carro. As divergências entre as opiniões geralmente se dão em torno do valor da depreciação do veículo. Assunto esse que nem sempre é claro para todas as pessoas, a única certeza é a de que comprar ou vender um carro é algo que precisa ser decidido com cuidado, principalmente quando há a intenção de realizar um bom negócio.

Existem basicamente dois modos de calcular a depreciação de um carro. O primeiro, por meio da tabela Fipe, e o segundo, por meio do cálculo contábil com regras definidas pela Receita Federal. O primeiro é mais conhecido por quem já realizou pesquisas de preços em concessionárias, pois é o mais utilizado em negociações e tem seus valores de depreciação determinados por fórmulas que envolvem o tempo de vida útil de cada veículo. Já o cálculo contábil com base nas regras definidas pela Receita Federal prevê a desvalorização anual de 20% do valor pago pelo veículo e geralmente é utilizado para

fins de prestação de contas patrimoniais, inclusive para o pagamento do imposto de renda sobre o patrimônio de uma pessoa ou empresa.

Imagine você um carro com sete anos de uso, comprado novo ao custo de G\$ 50.000,00. Perceba que pelas regras definidas pela Receita Federal a depreciação anual é de 20%. Isto é, a cada ano o valor do carro é igual a 80% do valor do ano anterior. Então, o valor do carro após o intervalo de um ano é reduzido para 80% do valor inicial. Neste modelo de depreciação, logo após um ano de uso, o valor atual é de 80% do valor pago à vista. Ao chamar o valor à vista de  $V_0$  e o valor após um ano de  $V_1$ , é possível calcular  $V_1$  a partir de  $V_0$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \cdot 80\% \text{ (I)} \\ V_1 &= 50.000 \cdot 0,8 \\ V_1 &= 40.000 \end{aligned}$$

Assim, o valor corrigido do carro após um ano de uso, conforme as regras definidas pela Receita Federal, é de G\$ 40.000,00. Continuando os cálculos para determinar o valor do carro após dois anos de uso, chamando esse novo valor de  $V_2$  e considerando a depreciação anual de 20%,  $V_2$  deve corresponder a 80% de  $V_1$ . Observe:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 \cdot 80\% \text{ (II)} \\ V_2 &= 40.000 \cdot 0,8 \\ V_2 &= 32.000 \end{aligned}$$

Ou seja, após dois anos de uso, o valor corrigido do carro, conforme as regras definidas pela Receita Federal, é de G\$ 32.000,00. Seguindo o mesmo raciocínio, é possível calcular o valor atualizado após três anos de uso. Chamando esse valor de  $V_3$ , temos:

$$V_3 = V_2 \cdot 80\% \text{ (III)}$$

$$V_3 = 32.000 \cdot 0,8$$

$$V_3 = 25.600$$

É possível então concluir que após três anos de uso o valor depreciado do carro é de G\$ 25.600,00. Continuar calculando ano a ano até chegar no valor corrigido atual (sete anos) é demasiado trabalhoso. Buscar uma relação matemática que permita o cálculo direto do valor da depreciação do veículo para o tempo de 7 anos é uma tarefa mais profícua. Para tal, perceba que o valor após um ano da compra ( $V_1$ ) está relacionado com o valor inicial do carro ( $V_0$ ). E que, por sua vez, o valor após dois anos ( $V_2$ ) está relacionado com o valor após um ano ( $V_1$ ). Como é possível encontrar o valor de  $V_1$  pela equação (I) e de  $V_2$  pela equação (II), também é possível calcular o valor de  $V_2$  a partir de  $V_0$ , substituindo a equação (I) na equação (II). Observe:

$$V_2 = V_1 \cdot 0,8$$

Mas  $V_1 = V_0 \cdot 0,8$ , portanto:

$$V_2 = (V_0 \cdot 0,8) \cdot 0,8$$

$$V_2 = V_0 \cdot 0,8 \cdot 0,8$$

$$V_2 = V_0 \cdot 0,8^2 \text{ (IV)}$$

Veja só, o valor após dois anos é igual ao produto do valor inicial pela potência de base 0,8 e expoente 2, expoente este que indica o número de anos transcorridos desde a compra do carro. Seguindo o mesmo raciocínio é possível obter  $V_3$  a partir de  $V_0$ . Para tanto, é necessário utilizar as equações (III) e (IV). Observe:

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2 \cdot 0,8 \\ V_3 &= (V_0 \cdot 0,8^2) \cdot 0,8 \\ V_3 &= V_0 \cdot 0,8^2 \cdot 0,8 \\ V_3 &= V_0 \cdot 0,8^3 \quad (V) \end{aligned}$$

O valor após três anos é igual ao produto do valor inicial pela potência de base 0,8 e expoente 3, expoente este que indica o número de anos transcorridos desde a compra do carro. Note que há um padrão (regularidade) nas equações (I), (II) e (V), que pode ser generalizado da seguinte forma:  $V_n = 50.000 \cdot 0,8^n$ , em que  $n$  representa o número de anos transcorridos desde a compra do carro.

Assim sendo, para calcular o valor atualizado do carro após 7 anos de uso, conforme as regras definidas pela Receita Federal, é possível utilizar a relação  $V_n = 50.000 \cdot 0,8^n$ , sendo  $n$  o número de anos transcorridos desde a compra do veículo, ou seja,  $n = 7$ :

$$\begin{aligned} V_n &= 50.000 \cdot 0,8^n \\ V_7 &= 50.000 \cdot 0,8^7 \\ V_7 &= 50.000 \cdot 0,2097152 \\ V_7 &= 10.485,76 \end{aligned}$$

O raciocínio desenvolvido até aqui permite que o cálculo do valor atual do carro seja calculado para qualquer tempo de uso (em anos). Observe na Tabela 9 alguns valores de depreciação calculados a partir da relação  $V_n = 50.000 \cdot 0,8^n$ .

Ano(s) de uso do carro ( $n$ )	Valor após a depreciação ( $V_n = 50.000 \cdot 0,8^n$ )
0	$50.000 \cdot 0,8^0 = 50.000 \cdot 1 = 50.000$
1	$50.000 \cdot 0,8^1 = 50.000 \cdot 0,8 = 40.000$
2	$50.000 \cdot 0,8^2 = 50.000 \cdot 0,64 = 32.000$
3	$50.000 \cdot 0,8^3 = 50.000 \cdot 0,512 = 25.600$
4	$50.000 \cdot 0,8^4 = 50.000 \cdot 0,4096 = 20.480$
5	$50.000 \cdot 0,8^5 = 50.000 \cdot 0,32768 = 16.384$
6	$50.000 \cdot 0,8^6 = 50.000 \cdot 0,262144 = 13.107,20$
7	$50.000 \cdot 0,8^7 = 50.000 \cdot 0,2097152 = 10.485,76$

Tabela 9: Valor do carro ao longo dos anos.

Perceba que para cada ano de uso do veículo há um único valor atualizado após a depreciação. Ou seja, a expressão  $50.000 \cdot 0,8^n$  é uma das formas de representar uma função que relaciona o valor corrigido do carro ( $V_n$ ) e o tempo (em anos) transcorrido desde a sua compra ( $n$ ). Assim como já indicamos, por vezes é profícuo analisar uma função por meio de gráficos. Observe na Figura 17 a representação gráfica das relações entre  $V_n$  e  $n$ , por meio de um gráfico de colunas.

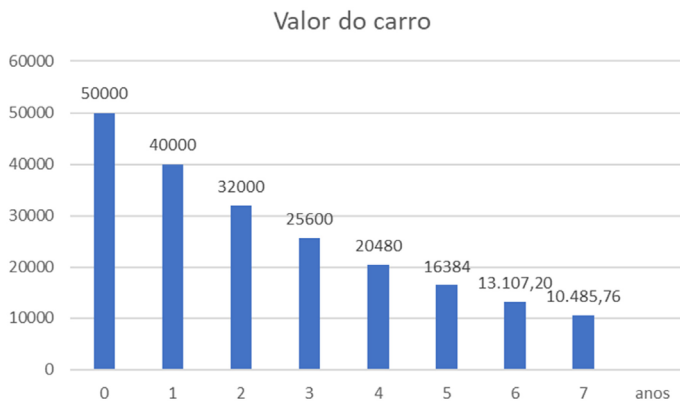


Figura 17: Gráfico de barras do valor do carro ao longo dos anos.

Situações como essa do cálculo da depreciação do valor do carro costumam ser modeladas por meio de **funções do tipo exponencial**. As funções do tipo exponencial são aquelas cuja variação está associada ao expoente de uma potência e suas representações gráficas no plano cartesiano são curvas exponenciais. A função exponencial é definida da seguinte forma:

**Uma função que associa cada elemento  $x$  a uma potência de base  $a$  e expoente  $x$ , isto é, a um número  $a^x$ , em que a base da potência ( $a$ ) seja maior do que zero ( $a > 0$ ) e diferente de 1 ( $a \neq 1$ ) é chamada de função exponencial.**

Geralmente  $x$  é tomado como um elemento do conjunto dos números reais porque dessa forma é possível



garantir que  $a^x$  será um elemento do conjunto dos números reais positivos. Ainda, de outra forma, diz-se que  $f$  é uma função exponencial de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+^*$  se for da forma  $f(x) = a^x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Vale destacar que se a base da potenciação fosse igual a 1, todos os valores de  $f(x)$  seriam iguais a 1, pois toda potenciação com base 1 resulta em 1. Por isso, é necessário exigir que a base da potência da função exponencial seja um número diferente de 1, caso contrário a função não teria características de uma função do tipo exponencial e se tornaria uma função constante,  $f(x)=1$ . É possível também justificar por que funções cuja variação se dá no expoente de uma potência de base  $a$  com  $a < 0$  não são chamadas de funções exponenciais, contudo tal justificação foge ao escopo deste material. O que importa aqui é destacar que funções exponenciais são aquelas cuja variação está relacionada ao expoente de uma potência de base  $a$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

Para representar graficamente funções exponenciais, uma possibilidade é calcular alguns pares ordenados  $(x, y)$  e depois representá-los no plano cartesiano. Consideremos a função  $f(x) = 5^x$ , conforme mostrado na Tabela 10 e na Figura 18, a seguir:

<b>x</b>	<b>y</b>
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625
7	78125

Tabela 10: Pares ordenados  $(x, y)$  da função  $f(x) = 5^x$ .

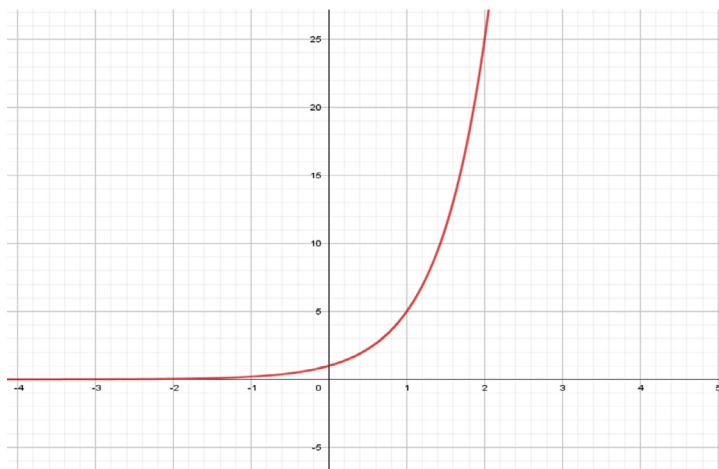


Figura 18: Gráfico da função  $f(x) = 5^x$

Veja que a curva que representa a função  $f(x) = 5^x$  não cruza o eixo x. Isso se dá pois o contradomínio da função exponencial não assume o zero e nem os números reais

negativos como elementos. Vejamos o que ocorre para  $f(x) = 5^x$ , ao calcularmos os valores de  $y$  para valores de  $x$  cada vez menores:

$$5^1 = 5$$

$$5^0 = 1$$

$$5^{-1} = 0,2$$

$$5^{-2} = 0,04$$

$$5^{-3} = 0,008$$

Analogamente, a função de depreciação do carro citada anteriormente, cuja lei de formação é  $f(x) = 50.000 \cdot 0,8^x$ , pode ser representada graficamente no plano cartesiano, conforme mostra a Figura 19, a partir dos pares ordenados mostrados na Tabela 11.

x	y
0	50.000
1	40.000
2	32.000
3	25.600
4	20.480
5	16.384
6	13.107,20
7	10.485,76

Tabela 11: Pares ordenados  $(x, y)$  da função  $f(x) = 50.000 \cdot 0,8^x$ .

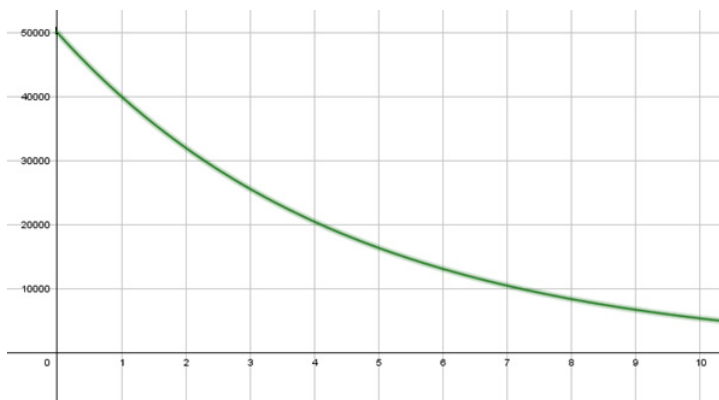


Figura 19: Representação geométrica da função  $f(x) = 50.000 \cdot 0,8^x$ .

Por fim, outro ponto importante a ser destacado sobre as funções exponenciais é o seu comportamento de crescimento ou decrescimento. Existem casos de funções exponenciais em que conforme o valor de  $x$  aumenta o valor de  $y$  também aumenta, o que caracteriza uma função **crecente**. A função  $f(x) = 5^x$  é um exemplo de função exponencial do tipo crescente. Há outros casos de funções exponenciais em que conforme o valor de  $x$  aumenta, o valor de  $y$  diminui, caracterizando uma função **decrescente**. A função  $f(x) = 50.000 \cdot 0,8^x$  é um exemplo de função exponencial do tipo decrescente.

O crescimento ou decrescimento de uma função exponencial pode ser identificado antes mesmo da visualização da representação gráfica da função no plano cartesiano. Para tanto, basta analisar o valor do coeficiente  $a$  presente na lei de formação da função exponencial. Quando  $a > 1$ , a representação gráfica da função expo-

nencial será uma curva crescente. Quando  $a$  for um número entre zero e um, a representação gráfica da função exponencial será uma curva decrescente. A Figura 20 sintetiza a relação entre o valor do coeficiente  $a$  da lei de formação da função exponencial e a representação gráfica da função no plano cartesiano.

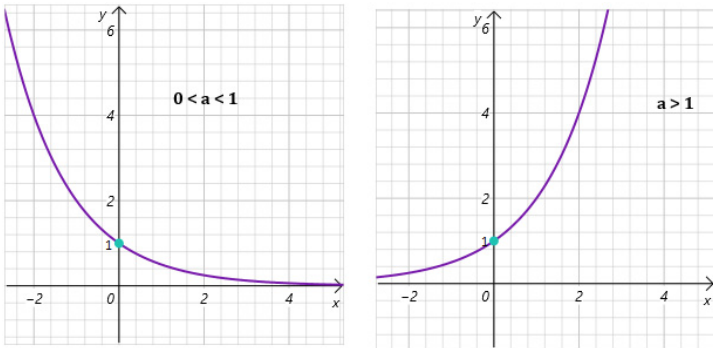


Figura 20: Relação entre o coeficiente  $a$  e o crescimento ou decréscimo da função exponencial.

As funções do tipo exponencial têm aplicações em vários outros contextos e áreas do conhecimento, como, por exemplo, em Biologia, no cálculo de proliferação de bactérias em um dado material. Neste capítulo, o objetivo foi apresentar e discutir os conceitos básicos relacionados às funções exponenciais. No próximo, o foco do estudo será o das funções logarítmicas.



# Função Logarítmica



Trens são meios de transporte incríveis. Além de serem economicamente interessantes, os trens são uma ótima opção para passageiros viajarem a grandes distâncias. No Brasil, há trilhos com transportes de passageiros em grandes cidades (como São Paulo, Rio de Janeiro e Porto Alegre) e há antigas ferrovias históricas que oferecem passeios turísticos encantadores (como no Paraná, Minas Gerais e Espírito Santo).

Uma das coisas que pode gerar preocupação em viagens de trens está relacionada com uma das principais características deste meio de transporte: os trilhos. Diferentemente de um ônibus, carro ou barco, um trem não pode desviar de obstáculos que apareçam em seu caminho. Além disso, qualquer mudança na posição dos trilhos pode causar um grave acidente por descarrilamento dos vagões, tal como em casos de terremotos que podem desalinhar a estrutura de uma parte do trajeto. Mas é claro que engenheiros, ao proje-

tarem as ferrovias, levam em consideração todas essas situações que podem causar danos aos trilhos, principalmente em lugares onde terremotos são frequentes, assim como nos territórios onde há o congelamento dos trilhos devido ao frio extremo (na China isso costuma acontecer). Mas será que em países onde não se leva em consideração essas interferências da natureza corre-se o risco de algum acidente grave? No Brasil, por exemplo, Minas Gerais já apresentou tremores de terra e é sabido que os trilhos que por lá existem não foram projetados para resistirem a grandes oscilações de terra. Dito de outra forma, é seguro fazer um passeio de trem em Minas Gerais durante um terremoto?

Uma das formas de medir a intensidade de terremotos é por meio da escala Richter, desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. A escala Richter é uma escala logarítmica e sua magnitude (graus) é uma medida quantitativa da “força” de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e com a energia liberada a partir do epicentro de um tremor.

A Tabela 12 relaciona a magnitude de um terremoto e seus efeitos na superfície:



Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
De 3,5 a 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
De 5,5 a 6,0	Na melhor das hipóteses, causa danos leves a edifícios estruturalmente sólidos, mas pode danificar gravemente residências mal-construídas em áreas próximas.
De 6,1 a 6,9	Pode ser destrutivo em áreas de em torno de até 100 km do epicentro.
De 7,0 a 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos em uma grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Tabela 12: Escala Richter.

Para calcular a magnitude de um terremoto é necessário medir a amplitude do tremor. A amplitude é uma forma de medir a movimentação do solo. Ela está diretamente associada ao tamanho das ondas registradas nos sismógrafos. A fórmula que relaciona as amplitudes medidas com a magnitude do terremoto é:

$$M = \log_{10} A - \log_{10} A_0$$

*A é a amplitude máxima medida no sismógrafo a 100 km do epicentro do terremoto, é a amplitude de referência ( $\log A_0$  é constante) e  $M$  é a magnitude do terremoto.*

Perceba que para calcular a magnitude de um terremoto é necessário utilizar uma operação matemática cha-

mada de logaritmo, cuja notação é  $\log$ . O logaritmo está intimamente associado com a potenciação (discutida no Capítulo 4) e é definido como mostrado na Figura 21.

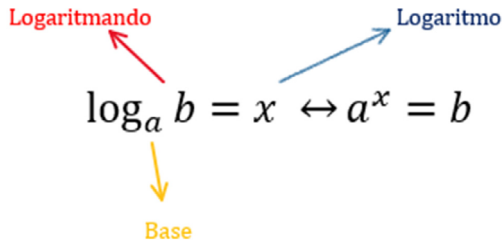


Figura 21: Definição de logaritmo.

Em que:

- $a$  e  $b$  são números positivos, com  $a$  diferente de 1;
- O logaritmo de  $b$  na base  $a$  é o expoente ao qual devemos elevar a base  $a$  de modo que a potência  $a^x$  seja igual a  $b$ .

Por exemplo:

$$\log_2 8 = x$$

- a base é 2
- o logaritmando é 8
- o logaritmo é  $x$

Veja na Tabela 13 como calcular alguns logaritmos a partir da definição acima apresentada.

Expressão logarítmica	Cálculo	Logaritmo
$\log_2 8 = x$	$8 = 2^x \leftrightarrow 2^3 = 2^x \leftrightarrow 3 = x$	3
$\log_5 25 = x$	$25 = 5^x \leftrightarrow 5^2 = 5^x \leftrightarrow 2 = x$	2
$\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$	$4 = \frac{1}{2}^x \leftrightarrow 2^2 = 2^{-x} \leftrightarrow 2 = -x \leftrightarrow x = -2$	-2
$\log_8 1 = x$	$1 = 8^x \leftrightarrow 8^0 = 8^x \leftrightarrow 0 = x$	0

Tabela 13: Calculando logaritmos a partir da definição.

Por exemplo, para calcular a magnitude de um tremor com amplitude  $A$  de 1 grau considerando a amplitude de referência  $A_0$  com valor igual a 0,1, uma possibilidade é iniciar com o cálculo de  $\log_{10} A$  da seguinte forma:

$$\log_{10} A = x$$

$$\log_{10} 1 = x$$

$$10^x = 1$$

Então,  $x = 0$ , pois  $10^0 = 1$

Depois, calcular  $\log_{10} A_0$ , assim:

$$\log_{10} A_0 = x$$

$$\log_{10} 0,1 = x$$

$$10^x = 0,1$$

Então,  $x = -1$ , pois  $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

Então, com os valores de  $A$  e de  $A_0$  calcular a magnitude do terremoto da seguinte forma:

$$M = \log_{10} A - \log_{10} A_0$$

$$M = 1 - (-1)$$

$$M = 1 + 1$$

$$M = 2$$

Nesse caso, um terremoto com magnitude de 2 graus na escala Richter não seria sentido e seria incapaz de fazer tremer os trilhos de uma ferrovia. A critério de curiosidade, o terremoto mais forte já registrado ocorreu no Chile, com 9,5 graus de magnitude, causando uma enorme tragédia. No Brasil, principalmente em Minas Gerais, os tremores registrados nunca passaram de 3,2 graus de magnitude. Ou seja, realmente é pouco provável que os trilhos de uma ferrovia em Minas Gerais sejam afetados por algum terremoto, mesmo que aquela estrutura não tenha sido projetada para suportar tal fenômeno natural.

Perceba que há uma relação entre a amplitude marcada no sismógrafo e a magnitude do terremoto. Quanto maior for o valor da amplitude, maior será o valor da magnitude, ou seja, maior será o poder de destruição do terremoto. Para compreender melhor isso, a Tabela 14 apresenta alguns valores de logaritmos de base 10.

Expressão logarítmica	Cálculo	Logaritmo
$\log_{10} 10 = x$	$10^x = 10$	$x = 10$
$\log_{10} 10^2 = x$	$10^x = 10^2$	$x = 2$
$\log_{10} 10^3 = x$	$10^x = 10^3$	$x = 3$
$\log_{10} 10^4 = x$	$10^x = 10^4$	$x = 4$
$\log_{10} 10^5 = x$	$10^x = 10^5$	$x = 5$
$\log_{10} 10^6 = x$	$10^x = 10^6$	$x = 6$
$\log_{10} 10^7 = x$	$10^x = 10^7$	$x = 7$

Tabela 14: Logaritmos de base 10.

Observe que para cada valor do logaritmando há uma correspondência com um único valor de logaritmo, ou seja, há aí uma função cuja lei de formação envolve o cálculo de um logaritmo. Uma função logarítmica de base  $a$  é definida da seguinte forma:

**Uma função  $f: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  chama-se função logarítmica<sup>14</sup> se para todo  $x$  real positivo associa-se o valor de seu logaritmo em uma base  $a$ , positiva e diferente de 1. Ou seja,  $f(x) = \log_a x$ , com  $a$  real, positivo e  $a \neq 1$ .**

Logo, a relação exposta na Tabela 14 pode ser analisada por meio de uma função  $f(x) = \log_{10} x$ , com  $x$  sendo uma potência de 10. Dessa forma, para representar graficamente no plano cartesiano a função  $f(x) = \log_{10} x$ , tal

<sup>14</sup> O símbolo  $\mathbf{R}_+^*$  significa: Números Reais positivos e não nulos.

como mostrado na Figura 22, basta ampliar a Tabela 14 com uma nova coluna, à direita, que indique o par ordenado  $(x, y)$ , tal como mostrado na Tabela 15.

Expressão logarítmica	Cálculo	Logaritmo	Par ordenado
$\log_{10} 10 = x$	$10^x = 10$	$x = 1$	$(10, 1)$
$\log_{10} 10^2 = x$	$10^x = 10^2$	$x = 2$	$(10^2, 2)$
$\log_{10} 10^3 = x$	$10^x = 10^3$	$x = 3$	$(10^3, 3)$
$\log_{10} 10^4 = x$	$10^x = 10^4$	$x = 4$	$(10^4, 4)$
$\log_{10} 10^5 = x$	$10^x = 10^5$	$x = 5$	$(10^5, 5)$
$\log_{10} 10^6 = x$	$10^x = 10^6$	$x = 6$	$(10^6, 6)$
$\log_{10} 10^7 = x$	$10^x = 10^7$	$x = 7$	$(10^7, 7)$

Tabela 15: Pares ordenados da função  $f(x) = \log_{10} x$  para auxiliar na construção do gráfico.

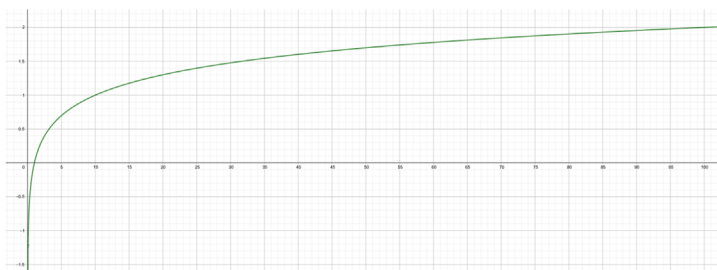


Figura 22: Representação gráfica da função.

Observe, na Figura 23, a representação gráfica de outras duas funções logarítmicas,  $f(x) = \log_2 x$  e  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ , respectivamente.

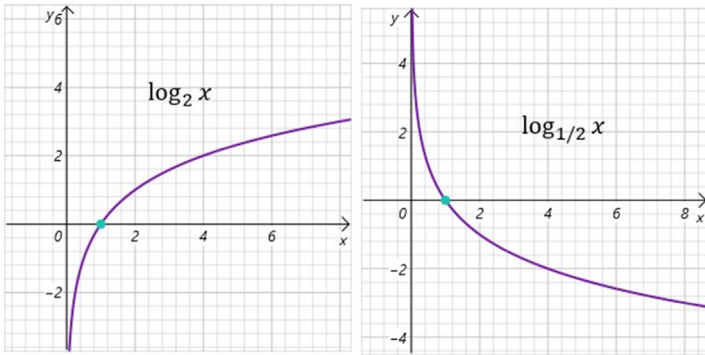


Figura 23: Representação gráfica da função  $f(x) = \log_2 x$  e  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

A função  $f(x) = \log_2 x$  é crescente e a base do logaritmo é  $a = 2$ , ou seja, a base  $a$  é maior do que um. Já a função  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  é decrescente e a base é  $a = \frac{1}{2}$ , ou seja, a base  $a$  é menor do que 1. Além disso, os gráficos de  $f(x) = \log_2 x$  e  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  interceptam o eixo  $x$  no ponto de coordenadas  $(1,0)$  e não cortam o eixo  $y$ . Isso porque:

- Se  $a > 1$ , a função logarítmica será crescente.
- Se  $0 < a < 1$ , a função logarítmica será decrescente

Perceba que os gráficos da função logarítmica e da função exponencial possuem um comportamento semelhante: a função exponencial intercepta o **eixo  $y$  em  $(0,1)$  e não cruza o eixo  $x$** , já a função logarítmica intercepta o eixo  $x$  **em  $(1,0)$  e não cruza o eixo  $y$** . Ambas são crescentes para  $a > 1$  e decrescentes para  $0 < a < 1$ . Acontece que

a função exponencial e a função logarítmica são inversas uma da outra, ou seja, isso significa que a função logarítmica faz o inverso do que faz a função exponencial.

Há diversas outras situações que quando interpretadas matematicamente são descritas por meio de expressões logarítmicas ou funções logarítmicas: o tempo para uma substância química reduzir a sua radioatividade ( $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$ ), o brilho de uma estrela ( $m = c = 25 \cdot \log_{10} I$ ), a escala Richter para medir a intensidade de terremotos ( $R = a + \log_{10} I$ ), etc. Até mesmo o cálculo da depreciação do valor de um veículo, tal como visto na seção anterior, poderia ser interpretado por meio de uma função logarítmica se quiséssemos calcular o tempo de vida útil, dado o valor atualizado do veículo.



# Função Periódica

Há vários séculos, rios e mares são utilizados para o transporte de cargas e de pessoas. A história da humanidade é marcada por acontecimentos relacionados ao desenvolvimento de conhecimentos náuticos, tal como as viagens dos europeus, nos séculos XIV e XV, para os continentes americano e africano. A criação de mapas, a sofisticação de embarcações, a determinação de rotas para navegações são bons exemplos destes avanços científicos e tecnológicos, que permitiram não só a expansão, mas também a consolidação do transporte hidroviário (lagos e rios) e marítimo (mares e oceanos).

Um desses conhecimentos, fundamental para que barcos possam atracar em segurança, foi a compreensão dos movimentos das marés. As marés são alterações *periódicas* no nível da água causadas pelos efeitos combinados de vários fatores, dentre eles a rotação da Terra e as forças gravitacionais da Lua e do Sol. De maneira simplificada, pode-se dizer que a maré, a cada dia, realiza quatro

movimentos: dois de cheia e dois de baixa<sup>15</sup>. Os eventos de cheia e baixa intercalam-se ao longo do dia, o que, é claro, influencia as chegadas e partidas de embarcações, principalmente no que se refere aos momentos de carga e descarga. Isso porque, geralmente, a carga e a descarga são realizadas próximas à costa e em águas rasas. É justamente nas regiões de água rasa que as marés tendem a ter maior influência sobre os transportes marítimos.

O calado, parte do barco que fica submersa, precisa ter uma profundidade menor do que a profundidade da água do local para atracamento, caso contrário tem-se um problema. Observe a Figura 24, que exemplifica a relação entre a profundidade do calado e a profundidade da água.

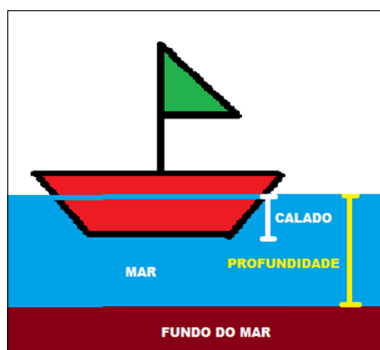


Figura 24: Relação entre a profundidade do calado e a profundidade da água.

Se o calado encostar no fundo do mar ou do rio, ou seja, se a estrutura submersa da embarcação tiver contato

---

<sup>15</sup> Os movimentos que aqui denominamos de cheia e baixa podem também ser referenciados como preia-mar e baixa-mar, respectivamente.

com o solo, pode ocorrer de o barco encalhar ou ainda danificar seriamente a sua estrutura. Daí a importância do estudo das marés nesse contexto<sup>16</sup>.

Como exemplo, observe a Tabela 16, que contém a Tábua de Marés de um porto, cujo nível médio de profundidade é de 1,4 metros, para três dias consecutivos.

Tábua de Marés Período de três dias			
Data	Hora	Evento	Profundidade aproximada (em metros)
Dia 1	5 h	Cheia	2,4
	11 h	Baixa	0,4
	17 h	Cheia	2,4
	23 h	Baixa	0,4
Dia 2	5 h	Cheia	2,4
	11 h	Baixa	0,4
	17 h	Cheia	2,4
	23 h	Baixa	0,4
Dia 3	5 h	Cheia	2,4
	11 h	Baixa	0,4
	17 h	Cheia	2,4
	23 h	Baixa	0,4

Tabela 16: Tábua de Marés.

<sup>16</sup> Este contexto foi inspirado na seção “Troque ideias – A trigonometria e o fenômeno das marés” (IEZZI et al., 2016, p. 64) e no artigo “Entenda o que é o calado do navio” (BUENO, 2022).

Perceba que os movimentos da maré se dão a cada 6 horas. Observe também que, como os movimentos intercalam-se, o intervalo entre dois movimentos de cheia, ou de baixa, é de 12 horas. Este intervalo entre dois movimentos de mesma natureza é chamado de *período* da maré. **De maneira geral, o menor intervalo de tempo em que ocorre a repetição de um determinado fato ou fenômeno é chamado de *período*.**

A Figura 25 apresenta uma outra forma de analisar a tábua das marés. Perceba que da esquerda para a direita há as marcações de algumas horas de um dia. A curva ondulada representa o nível da maré para cada hora. Por exemplo, no tempo de 5 horas, o nível da maré é máximo (2,4 metros), no tempo de 11h o nível da maré é mínimo (0,4 metros).

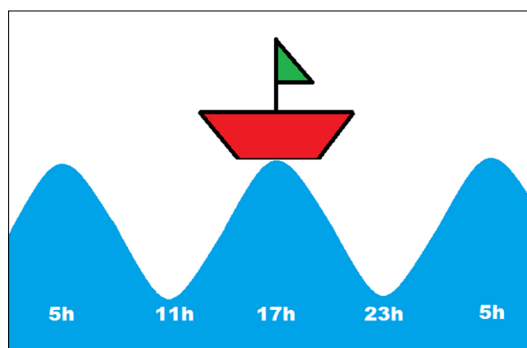


Figura 25: Relação entre o tempo e a altura da maré.

Além disso, a diferença entre o valor da profundidade de um período de cheia, ou baixa, e o nível médio é sempre de 1 metro. Chamamos o instante de valor máximo

de *pico* e o instante de valor mínimo de *vale*. Ainda, a distância entre o nível médio e o vale, ou o pico, é chamada de *amplitude*.

Entre um *pico* e um *vale* há sempre pelo menos um período de decrescimento. Analogamente, entre um *vale* e um *pico* há sempre um período de crescimento. O que pode ser compreendido a partir da observação do comportamento das marés: entre uma cheia e uma baixa há sempre um período de vazante; entre uma baixa e uma alta há sempre um período de enchente.

Assim, o período da maré, no nosso porto, é de aproximadamente 12 horas e tem um nível do mar que varia dentro de uma amplitude de 2 metros. Isso significa que a cada 12 horas a maré sobe uma vez 1 metro acima do nível do mar (isto é, até 2,4 metros de profundidade) e desce 1 metro abaixo do nível do mar (isto é, até 0,4 metros de profundidade).

Veja que o comportamento das marés é algo que se repete, ou seja, é periódico. Além disso, há uma relação direta entre o tempo  $x$  e o nível  $y$  da maré, pois a cada hora  $x$  do dia há um único nível de altura  $y$  da maré correspondente. Como visto anteriormente, relações desse tipo podem ser analisadas por meio de uma função. Nesse caso, o tipo de função é a *função periódica*, que é definida da seguinte forma:

**Uma função de  $\mathbf{R}$  em  $\mathbf{R}$  chama-se periódica quando existe um número real  $\mathbf{p} > 0$ , tal que:  $\mathbf{f(x)=f(x+p)}$ , para todo  $\mathbf{x \in R}$ ,  $\mathbf{p}$  é chamado de período da função.**

Observe na Tabela 16 que o valor da altura da maré  $y$  se repete a cada intervalo de 12 horas. Por exemplo, a altura da maré às 5h é de 2,4 metros. Após um período de 12h, às 17h, a altura da maré se repete ficando com 2,4 metros novamente. Ou seja, a repetição das medidas da altura da maré acontece a cada 12 horas. Matematicamente essa relação pode ser interpretada da seguinte forma:

$$f(5) = 2,4$$

$$f(17) = 2,4$$

$$\text{Então, } f(5) = f(17), \text{ pois } f(5) = f(5+12)$$

Por isso, a relação entre o tempo e a altura da maré pode ser analisada como uma função periódica. Ainda, outra forma de compreender como o fenômeno das marés pode ser modelado por meio de uma função periódica é por meio da representação gráfica dos dados da Tabela 16 no plano cartesiano, conforme mostrado na Figura 26.

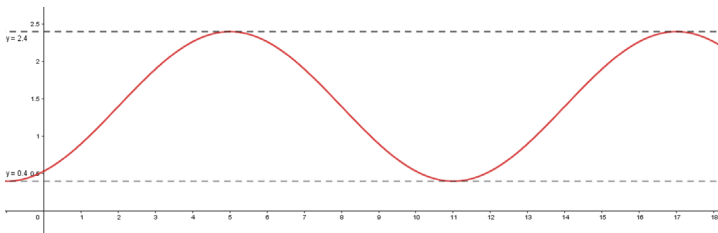


Figura 26: Representação da curva do problema das marés no plano cartesiano.

A forma geométrica que descreve a relação entre os valores do tempo (eixo  $x$ ) e os valores de alturas da maré

(eixo  $y$ ) é uma curva com um formato de onda. Há várias outras situações que podem ser modeladas matematicamente por meio de funções periódicas, tal como a descrição de correntes elétricas alternadas, radiação eletromagnética, pêndulos, molas, etc. De maneira geral, tais fenômenos são modelados com base em dois casos de funções periódicas: a função seno e a função cosseno<sup>17</sup>.

Dado um número real  $x$ , pode-se associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de  $x$  radianos. Define-se a função trigonométrica seno como a função real de variáveis reais que associa a cada número real  $x$  o valor real  $\text{sen } x$ , ou seja:

$$f: R \rightarrow R, f(x) = \text{sen } x$$

Antes de construir o gráfico da função seno, será apresentada a Tabela 17 com os pares ordenados  $(x, y)$ . A medida  $x$  do ângulo (ou arco) está expressa em radianos.

---

<sup>17</sup> Dentre as funções periódicas há um grupo de funções que são chamadas de funções trigonométricas. A função seno e a função cosseno são funções trigonométricas. Estas funções recebem estes nomes devido à íntima relação que guardam com alguns dos objetos de estudo da trigonometria. O primeiro volume da coleção FOR-MA-TEMÁTICA ocupa-se inteiramente do tema trigonometria. Lá estão apresentados e articulados os conceitos de seno e de cosseno e como estes estão sempre associados a um ângulo ou arco de referência. Cabe dizer que a função seno e a função cosseno estão relacionadas entre si de forma que compreender uma é senão compreender a outra. Isso porque o valor numérico do seno de um ângulo está associado ao valor numérico do cosseno de seu complemento. Embora a tangente também seja um objeto trigonométrico, sua natureza periódica é distinta daquela do seno e do cosseno, o que, portanto, requer um tratamento específico que foge ao escopo deste texto.

<b>x</b>	<b>y = sen x</b>
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\pi$	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$2\pi$	0

Tabela 17: Pares ordenados da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ .



Pela tabela 17, é possível perceber que as imagens se repetem. Para evidenciar esse comportamento periódico, segue, na Figura 27, a representação do gráfico da função seno, entre 0 e  $4\pi$ .

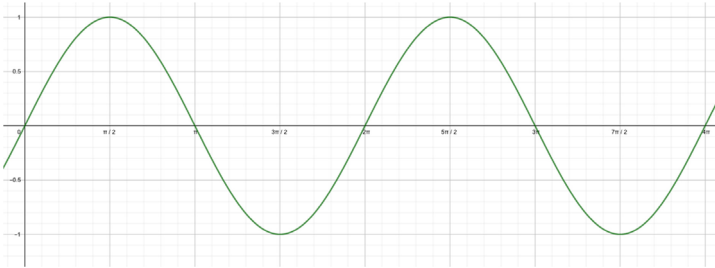


Figura 27: Representação gráfica da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ .

A função trigonométrica cosseno se define como uma função real de variáveis reais que associa a cada número real  $x$  o valor real  $\cos x$ , ou seja:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$$

Segue, na Tabela 18, os pares ordenados da função cosseno. A medida  $x$  do ângulo (ou arco) está expressa em radianos.

<b>x</b>	<b>y = cos x</b>
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi$	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$2\pi$	1

Tabela 18: Pares ordenados da função  $f(x) = \cos(x)$ .

Na Figura 28, tem-se a representação gráfica da função cosseno, entre 0 e  $4\pi$ .

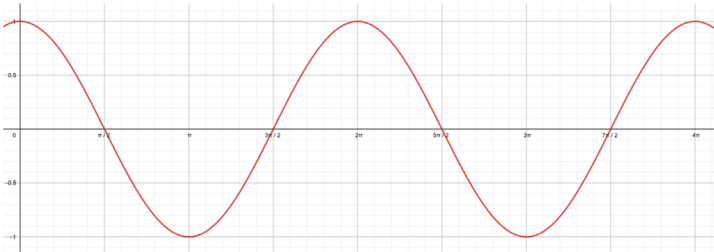


Figura 28: Representação gráfica da função  $f(x) = \cos(x)$ .

Cabe evidenciar que a modelagem de fenômenos do cotidiano, de natureza periódica, é geralmente realizada, em matemática, por meio de funções do tipo trigonométricas. Isso não significa dizer que toda função periódica é uma função trigonométrica. Como já foi dito, basta que uma função se repita dentro de um determinado período para que ela possa ser dita periódica. Agora, por que geralmente optamos pelas funções seno e cosseno para modelar problemas do cotidiano? Isso se deve a vários fatores, dentre eles se destaca a facilidade de adequar estas funções a esses problemas.

As funções seno e cosseno podem agregar facilmente em suas leis de formação outras informações chamadas de parâmetros. Esses parâmetros são definidos levando-se em conta três características essenciais para esses tipos de funções periódicas: **deslocamento vertical** (nível médio), **amplitude** e **período**, que variam conforme cada situação, observe a Figura 29.

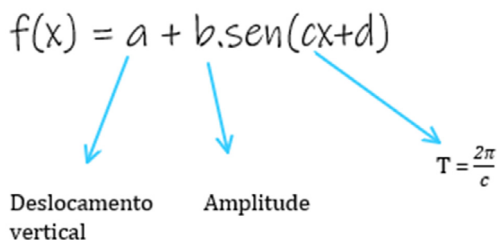


Figura 29: Parâmetros da função seno.

Tais parâmetros causam os seguintes impactos nas representações gráficas das funções do tipo trigonométricas:

- O **parâmetro a** desloca verticalmente a curva no plano cartesiano estabelecendo um novo nível médio. Repare que na função seno e cosseno o nível médio é sempre zero;
- O **parâmetro b** aumenta ou diminui a amplitude da curva, ou seja, interfere na distância entre o ponto de pico e o ponto de vale;
- O **parâmetro c** alarga ou estreita o período, ou seja, aproxima ou afasta horizontalmente dois pontos de máximo consecutivos ou dois pontos de mínimo consecutivos.

No caso do fenômeno das marés discutido no início do capítulo, a função do tipo trigonométrica que melhor modela aquela situação tem a seguinte lei de formação:

$$f(x) = 1,4 + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 5)\right),$$

em que  $x$  é o tempo em horas

Veja que a função  $f(x) = 1,4 + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 5)\right)$  não é a função seno nem a função cosseno. É, por outro lado, uma função associada à função cosseno, dita do *tipo trigonométrica* e ponderada pelos parâmetros: deslocamento vertical, amplitude e período. A Figura 30 apresenta o gráfico de  $f(x) = 1,4 + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 5)\right)$ .

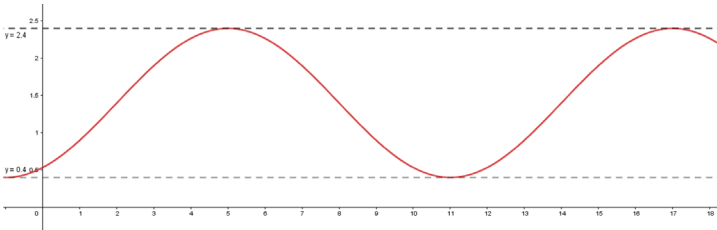


Figura 30: Representação gráfica da função

$$f(x) = 1,4 + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 5)\right)$$

Como dito anteriormente, as funções periódicas são amplamente utilizadas em várias áreas do conhecimento, principalmente para modular fenômenos por meio de senoides e de cossenoides (curvas resultantes da representação gráfica da função seno e cosseno, respectivamente). Uma compreensão profunda dos fenômenos periódicos e suas modelagens matemáticas geralmente exige a mobilização de outros conhecimentos da Matemática, dadas suas complexidades. Porém, o reconhecimento das funções que apresentam periodicidade e suas

respectivas representações gráficas no plano cartesiano já é de grande ajuda para a análise das situações que podem ser modeladas por tais objetos matemáticos e, por isso, o foco de estudo se deu apenas sobre esses aspectos.

## ALGUMAS PALAVRAS FINAIS...



Encerrada esta apresentação de alguns dos principais conceitos relacionados ao tema Funções, esperamos que este material possa cumprir com os objetivos para os quais foi pensado: constituir-se em um rico material de apoio para o estudo dos principais conceitos sobre Funções estudados na Educação Básica, contribuindo para a formação de tradutores e intérpretes de Libras, professores que ensinam Matemática, estudantes e qualquer pessoa interessada neste tema!

Convidamos o leitor a acompanhar os trabalhos do Gepam ([gepam.ufsc.br](http://gepam.ufsc.br)) e a conhecer os materiais e cursos de formação em Matemática que temos desenvolvido, resultado de nossos estudos e pesquisas, no esforço de problematização das relações entre alteridade e educação matemática.





# REFERÊNCIAS



BUENO, Sinara. **Entenda o que é o calado do navio**. Fazcomex Tecnologia para Comércio Exterior Ltda, 2022. Disponível em: <[fazcomex.com.br/comex/calado-do-navio-o-que-e](http://fazcomex.com.br/comex/calado-do-navio-o-que-e)>. Acesso em: 17 jan. 2023.

IEZZI, Gelson et. al. **Matemática** – ciência e aplicações. Ensino médio. Vol. 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016a.

IEZZI, Gelson et. al. **Matemática** – ciência e aplicações. Ensino médio. Vol. 2. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016b.

GEOGEBRA. **GeoGebra WebApp**. The GeoGebra Group. Disponível em: <[geogebra.org](http://geogebra.org)>. Acesso em 17 jan. 2023.